Williami 739

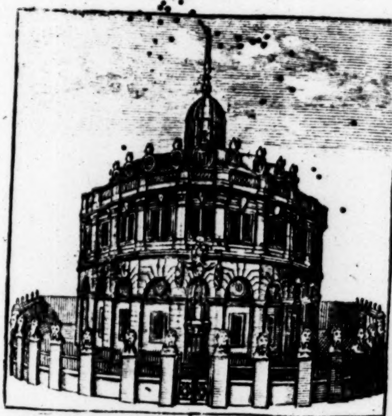
GUILELMI OUGHTRED ÆTONENSIS,

Quondam collegii Regalis

In

CANTABRIGIA Socii.

Opuſcula MATHEMATICA hactenus inedita.



OXONII,

E THEATRO SHELDONIANO, *Anno* 1677.

1851 Dec 2

Gaven Fe[illegible]

Jacob Lily 739

PRÆFATIO.

CUM incidimus in Manuſcripta exemplaria Cl. Oughtredi, *viſi ſumus Tyronibus non inutilem operam, nec in Matheſi magis exercitatis ingratam præſtituri, ſi ex iis nonnulla Typis mandaremus, Quapropter cum alia eſſent mutila, alia prelo haud ita idonea, ea tantum excerpſimus, quæ propter uſum, & varietatem tum luce publica, tum* Oughtredi *nomine non indigna viderentur. Quorum pleraque cum eo animo ſcripſit, ut iis quos inſtitueret, ſubſervirent, non poſſunt juvenes melius hiſce ſtudiis initiari, quam ſi* Oughtredi *genio ſe aſſuefacerent. Qui, ſi quis alius, natus ad Matheſin videtur, & in exemplum perſpicacis animi, ſubactique judicii. Nemo ſiquidem magis perſpicua brevitate uſus eſt, aut penitius ipſas rerum eſſentias animo complexus, quas dum contemplatur, ſuas ſibi creare notitias, nec tam invenire veritatem, quam conſtituere videtur. Cujus rei magnum ſane exem-*

exemplum præbet Clavis Mathematica, *ubi accurato rerum examini, severitati judicii, rigidaque veritati ita constanter assuescit anima, ut discat non modo phantasiæ viribus res pene infinitas uno intuitu comprehendere, sed ultra humanum fere modum intelligere, & tarditatem discursus prævenire: Nullibi magis sincerus demonstrandi gustus hauritur, aut pari fructu, qua homini propria, mentis agitatio aut solertia promovetur; nec aliunde pulchrior cogitationum ordinatio, aut habitus sentiendi congrue fælicius ediscitur. Præcipua Matheseos utilitas, est severa mentis exercitatio, in omni studio veritatis amor, & ex claritudine idearum orta serenitas; minuitur illius dignitas quoties ad sensibilia descendit; Infima Matheseos pars est quæ hominum necessitatibus subvenit, aut ornamento inservit; & ex humani generis usibus parum æstimatur. Autores isti, qui prolixa sua facilitate laborant, lectoribus faciunt contumeliam, & opinantes opus esse ut de omni prorsus re instruantur, ostendunt methodum qua ipsi solent intelligere: perplexo implicari circuitu, & à recta aberrare via, eorum est qui in tenebris versantur. Animus veritatis avidus supervacaneum om-*

ne fastidit, & ad rem ipsam properat; amat suas vires experiri, expetit difficultates, & sine victoria delassari erubescit. Noluit Oughtredus *sine fructu intelligi: satisque novit illam esse mentis humanæ indolem, ut velit aliquid sibi, quod ipsa suppleat, relictum; & ita velle instrui, ut à se tamen discere videretur, & quibuscunque usa fuerit subsidiis, ipsam inventionem veritatis, sibi soli deberi. Nonnulli Tractatuum quos nunc exhibemus, aliorum laboribus debentur, sed majori legentium utilitate in compendium redacti; Thesauri enim quos ipsi Autores eruebant, ab* Oughtredo *accepere nitorem & usum, qui nunquam quicquam alienum tractaverit, de quo non ipse Author, maxime gloriaretur, si ut suum posset vendicare. In* Institutionibus Mechanicis *si quid desideretur, abundè suppleri potest ex accuratissimo Tractatu* Cl. Wallisii, *qui solus pro dignitate hanc partem Matheseos tractavit, & de qua si cui postea scribere libuerit, ab illo mutuetur necesse est.*

Tra-

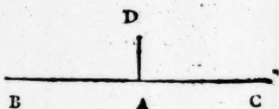
Tractatus qui sequuntur, hi sunt.

Centrum gravitatis cujusque corporis est certum punctum intra ipsum, circa se habens undiq; partes æqualium momentorum consistentes, secundùm quod deorsum fertur, & à quo si grave appensum linea concipiatur, dum fertur quiescit, positionem quam initio habebat servans. Estque linea illa semper horizonti perpendicularis.

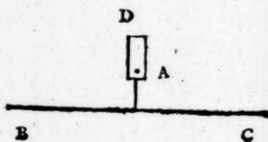
DE LIBRA.

LIBRA est BAC recta linea, cujus brachia sunt AB, AC: quæ sunt etiam distantiæ, sive segmenta libræ à centro.

Centrum libræ A, sive in libra sit, sive supra vel infra, est in linea perpendiculari semper ipsi libræ.

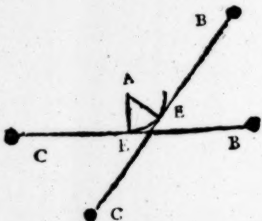


Trutina est DA horizonti perpendicularis.

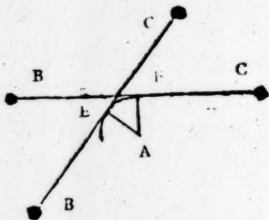


Prop. I. Si pondus in centro suæ gravitatis à recta sustineatur linea, nunquam manebit nisi eadem linea horizonti fuerit perpendicularis.

Prop. II. Libra horizonti æquidiſtans, cujus centrum ſit ſupra libram, æqualia in extremitatibus, æqualiterque à perpendiculo diſtantia habens pondera, ſi ab ejuſmodi ſitu moveatur, in eundem relicta redibit, ibique permanebit. Nam magnitudinis ex ponderibus B C & libra compoſitæ, centrum gravitatis eſt in E. quare (per I.) non ſuſtinebitur à perpendiculo AE, niſi ipſum etiam ſit horizonti perpendiculare.



Prop. III. Libra horizonti æquidiſtans cujus centrum ſit infra libram, æqualia in extremitatibus, æqualiterque à perpendiculo diſtantia habens pondera, in hoc ſitu manebit: ſi vero ab ejuſmodi ſitu moveatur, deorſum relicta ſecundum partem decliviorem movebitur. Nam magnitudinis ex ponderibus B C & libra compoſitæ centrum gravitatis eſt E. 1 Quare per I. &c.



Prop. IV. Libra horizonti æquidiſtans, cujus centrum ſit in ipſa libra, æqualia in extremitatibus, æqualiterque à centro diſtantia habens pondera, etiam ab ejuſmodi ſitu mota ubicunque relicta permanebit.

1 Secundum quod ex defin. grave deorſum fertur.

Nam

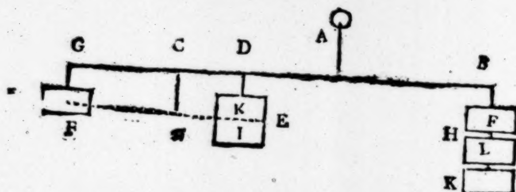
Nam magnitudinis ex ponderibus B C & libra compositæ centrum gravitatis est A: quare ab eo puncto appensa quiescet, positionem quam initio habebat servans, (per Definit.)

Similiter si pondera in libræ extremitatibus appendantur idem eveniet: dummodo ex suspensionum punctis ad centra gravitatum ponderum ductæ lineæ (quocunq; modo moveatur libra) si protrahantur, in centrum mundi concurrant. Ubi enim pondera hoc modo sunt appensa, ibi gravescunt, ac si in iisdem punctis centrum gravitatum haberent. Huic propositioni adversantur *Jordanus* de ponderibus; *Hier. Cardanus* de subtilitate. *Nic. Tartalea* de quæsitis ac inventionibus; quorum opiniones prolixa confutatione *Guidus* in hâc 4. prop. refellit.

Prop. V. Duo pondera E F in libra ex punctis D G appensa, si libra illa intercepta ita dividatur in puncto C, ut segmenta ponderibus reciprocè respondeant (hoc est si fiat GC. DC : : E. F) æquiponderabunt ex ipsis punctis acsi utrumque simul E + F ex puncto divisionis C suspendatur. Esto A centrum libræ, & sumatur AB = AC. sunt hi tres casus.

Casus I. Esto utrumque punctum D G ex eadem parte centri A

[1] Fiat AB. AG : : F.H } æquiponderant.
Et AB. AD. : : E. K } p. 6. 1. Archim.



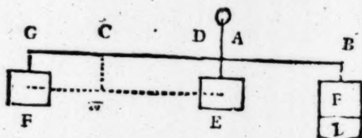
Dico H + K = E + F :
Ideoq; E + F ex C æquiponderare ipsis H+K ex B.
Nam dividatur H in F + L & E in K + I : probetur I = L.

[2] Erit AG — AB.AB : : H — F.F : hoc est GC.AB : : L. F.

[3] Et AB — AD.AB : : E — K.E : hoc est DC.AB : : I. E
at [4] G C. DC : : E. F

[6] Quare GC.AB : : I.F. Est igitur [6] I = L. Ergo &c.

Casus. 2. Esto punctum D in Centro A.



Fiat AB. AG : : F. H.

1 Proinde F. > H. & E < K. per Schol. 14. E. 5
2 Ex construct. primâ invertendo & dividendo.
3 Ex const. secundâ dividendo conversim.
4 Ex hypothesi.
5 Ex æquo perturbatè.
6 Per 9. E. 5.

Dico

Dico H = E + F Ideoq; E + F ex C. æquiponderare ipsi H. appenso ex B.

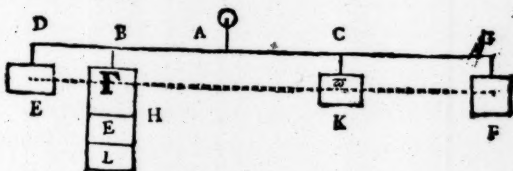
Nam dividatur H in F + L: probetur L = E

[1] Erit GC. AB :: L. F at [2] GC. DC :: E. F.

[3] Quare DC. AB :: L.E. Est ergo [4] L = E. Ergo.

Casus III. Esto punctum D ex altera parte centri A.

Fiat AB. AD :: E. K.
Et AB. AG :: F. H. } æquipond.



Dico H—K = E + F: Ideoque E + F ex C æquiponderare ipsi H--K nempe H -L ex B.

Nam dividatur H in F + E + L. probetur L = K.

[5] Erit DC. AB :: E + K.E: Et [6] GC.AB :: E + L. F. (E + L = H--F)

at GC. DC. :: E. F.

[7] Quare DC. AB :: E + L. E :: E + K. E.

Igitur erit [8] L = K. Ergo demtis LK. &c.

1 Ut in casu primo.
2 Ex Hyp.
3 Invertendo analogiam secundam & ex æquo perturbatè.
4 Nam DC = AC = AB. ex. Hyp. casus 2. & constructione propos.
5 Ex Analogiâ primæ constru. invertendo, & componendo.
6 Ex Analogia 2. Const. invertendo, & dividendo.
7 Ex æquo purturbatè.
8 Per 9. E. 5. & 3. ax. E. 1.

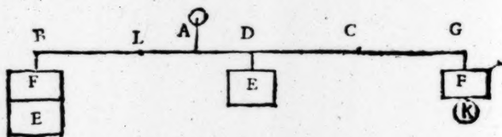
Probe-

Probetur H $<$ E + F :[1] E + F. F :: DG. DC :: AG + AD. AB. + AD $\overset{\cdot\,\cdot}{-}$ [2]
H. F.

Aliter demonſtrari poterunt ſinguli Caſus per centrum gravitatis ϖ inventum per 6. 1. Archimedis de æquiponderantibus.

Prop. VI. Si in libra BAC pendente è centro A ſuſpendantur ad puncta D G utrinque à C æquidiſtantia duo æqualia pondera E F, ſegmenta libræ è centro, ponderum ſuſpenſorum gravitatibus ſunt directe proportionalia: hoc eſt ut AD ad AG, ſic gravitas E ad gravitatem F.

Nam fiat AG. AL (AD) :: E. K. quare (per 6, 1.



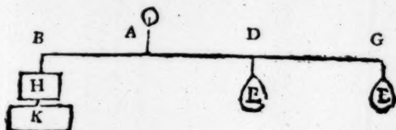
Arch. de æquipond.) E appenſum ad D vel L habebit ad gravitatem F; ſed K appenſum ad G gravitatem eandem F habebit. Ergo E appenſum ad G tanto ponderat gravius quam ad D, quanto F majus eſt quam K: vel quanto ſpatium AG majus eſt ſpatio AD.

Aliter demonſtratur ſic per 6, 1. Archim. de æquiponderantibus.

1 Componendo. Nam GC. DC :: E. F. ex hyp.
2 Per. 33. E. 5.

diſtat,

Est AB. AD :: E. H } æquipond.
Et AB. AG :: E. K }



[1] Ergo AD. AG :: H. K

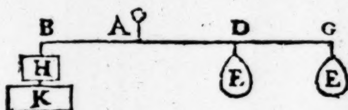
Corollarium. Quo pondus à centro libræ magis distat, eo gravius est; & per consequens velocius movetur.

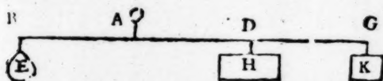
Atque hinc ratio Stateræ, qua ponderum gravitates notæ redduntur, facile ostendetur. Esto Stateræ scapus BAG, cujus trutina sive centrum sit A; appendiculum E.

Usus Stateræ potest esse duplex.

Nam primò appendiculum erit mobile in Stateræ brachio A G, & pondus appendetur ad B.

Dico gravitatem ponderis H ad gravitatem ponderis K esse ut AD. AG. Nam gravitas ponderis H





æquatur gravitati ponderis E appensi in D: & gravitas

1 Invertendo primam analogiam, & ex æquo ordinatè.

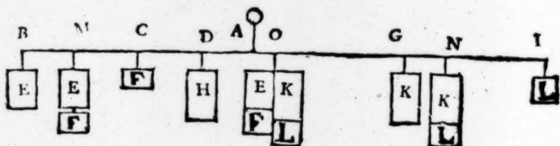
vitas ponderis K æquatur gravitati ponderis E appensi in G. Vel secundò appendiculum erit immobile in B : & pondera inæqualia H K. Dico H ad K esse ut AG. AD.

Nam cum pondera H E æquiponderent, item pondera K E.

Erit H. E :: AB. AD. Et K. E :: AB. AG. [1] Ergo.

Prop. VII. Quotcunque datis in libra ponderibus EFHKL ubicunque appensis puta ex punctis BCDGI, centrum libræ A invenire, ex quo si suspendatur libra, data pondera maneant.

Dividatur BC in M sic ut BM. CM :: F E.



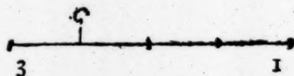
Deinde dividatur GI in N ut GN. NI :: L. K. Iterum dividatur MN in O, ut MO. NO :: KL.EF. Postremò dividatur DO in A, sic ut DA. AO :: EFKL. H.

Est igitur punctum A centrum gravitatis magnitudinis compositæ ex omnibus EFHKL ponderibus ad eadem libræ puncta suspensis.

1 Ergo H. K :: AG. AD. invertendo secundam analogiam & ex æquo perturbatè.

Ha-

Habeant brachia libræ proportionem non æqualitatis, ſed aliam quamlibet puta 3 ad 1 : Quare pondus 1 appenſum ad finem longioris brachii æqueponderabit ponderi 3 appenſo ad finem brevi-



oris. Jam vero utrique 3 & 1 apponatur æquale pondus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. & ſic pondera brevioris fient 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. & pondera longioris 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.

Brachium libræ longius graveſcet. Exceſſus autem gravedinis illius ſupra alterum, invenietur dividendo rationem ponderum in æqualitate reſpondentium, nempe $\frac{3}{1}$ per rationem ponderum auctorum $\frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \frac{8}{6}, \frac{9}{7}, \frac{10}{8}, \frac{11}{9}, \frac{12}{10}$ &c. Quotus ſive ratio exceſſus longioris brachii ſupra brevius orietur, $\frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \frac{2}{1}, \frac{15}{7}, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}, \frac{12}{5}, \frac{27}{11}, \frac{5}{2}$ &c. (ſic $\frac{12}{0}$) $\frac{3}{1}$ ($\frac{5}{2}$) quare ſi in fine brevioris brachii ſit 6 (3 + 3) & in fine longioris 4 (1 + 3) : gravitas longioris erit ad gravitatem brevioris, ut 2 ad 1, hoc eſt dupla. Et ſi in fine brevioris brachii ſit 12 (3 + 9) & in fine longioris ſit 10 (1 + 9) : gravitas longioris erit ad gravitatem brevioris, ut 5 ad 2, hoc eſt dupla & ſeſquialtera. Et ſimiliter de reliquis.

Conſect. Gravitas longioris brachii augetur ſuper gravitatem brevioris, tum propter majorem brachi-

orum in æqualitatem, tum propter gravitatem majorem utrique æqualiter appositam.

Brevius } *Longius* } 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. $+ \frac{2}{1} = \frac{4}{2}.\ \frac{5}{3}.\ \frac{6}{4}.\ \frac{7}{5}.\ \frac{8}{6}.\ \frac{9}{7}.\ \frac{10}{8}.\ \frac{11}{9}.\ \frac{12}{10}.$) $\frac{3}{1}$ ($\frac{3}{2}.\ \frac{9}{5}.\ \frac{2}{1}.\ \frac{15}{7}.\ \frac{9}{4}.\ \frac{7}{3}.\ \frac{12}{5}.\ \frac{27}{11}.\ \frac{5}{2}$ &c.

Sic $\frac{6}{3}.\ \frac{7}{4}.\ \frac{8}{5}.\ \frac{9}{6}.$) $\frac{5}{2}$ ($\frac{5}{4}.\ \frac{10}{7}.\ \frac{25}{16}.\ \frac{5}{3}.$

DE

DE VECTE.

Prop. I. Potentia in B ſuſtinens pondus E vecti BAC appenſum, & ipſum pondus, ſegmentis vectis à fulcimento A ſunt reciproce proportionalia. Dico AB.AC ∷ E. potentia in B ſuſtinens pondus E.

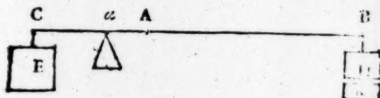
Nam fiat AB. AC ∷ E. H. æquepond. quare potentia æqualis ipſi H conſtituta in B æquiponderabit

ipſi E : hoc eſt prohibebit ne deorſum vergat. At hoc præſtat potentia præſuppoſita in B. Ergo.

Coroll. 1. Pondus quo fulcimento propius eſt, eo minore ſuſtentatur potentia.

Nam fiat AB. AC ∷ E. H.

Et αB. αC ∷ E. K.



[1] Et quia αB. αC ∸ AB. AC.

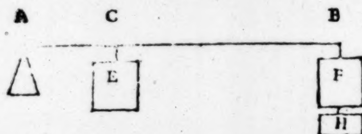
Erit E. K ∸ E. H. Ergo [2] K. < H.

Prop. II. Si pondus E inter fulcimentum & potentiam in B ſuſpendatur : potentia in B ſuſtinens pondus E, & ipſum pondus, ſegmentis vectis à

1 αB. αC. ∸ AB. αC. ∸. AB. AC. per. 8. E. 5.
2 10. E. 5.

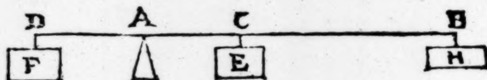
fulcimento A sunt etiam reciprocè proportionalia. Dico AB. AC : : E. potentia in B.

Nam appendatur ex B pondus F = E. [1] Erit AB.



AC : : gravitas F ex B. E ex C. Fiat AB. AC : : pondus E. H : item gravitas : quare F ex B. E ex C : : F ex B. H ex B. æquiponderabit ergo E ex C, & H ex B. Et potentia B = ipsi H. Nam potentia æqualis ipsi H posita in B, sustinebit ipsum H, ne decidat, quare & sustinebit ipsum E appensum ex C. ergo.

Coroll. 2. Potentia in B semper minor est pondere E. Aliter demonstratur sic. Fiat AD = AC.



Et ex D suspendatur pondus F = E. Et fiat AB. AD : : F.H. [2] Reliqua sunt facilia.

Coroll. 3. Si sint duæ potentiæ, una in B, altera in D : & utraque sustentet pondus appensum ex A : erunt potentiæ segmentis vectis ab A reciproce proportionales : hoc est AB. AD : : F. H : & po-

1 Per. 6. libræ.

2 F. E } æquipond. ergo etiam. E. H. æquiponderabunt. Quare.
F. H } Potentia B. = H. &c. ut in priori demonst.

tentia

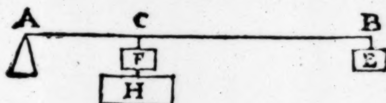
tentia in B puncto remotiore ab A minor est potentia in D puncto propiore.

Coroll. 4. Utraque potentia simul sumta æquatur ponderi appenso ex A.

Nam [1] DB.DA::A.H } [2] Ergo DB. DB:: A.H+F.
Et BD. BA :: A. F }

Prop. III. Si pondus E ex altero fine B appendatur, potentia in C sustinens pondus E, & ipsum pondus segmentis libræ à fulcimento sunt reciproce proportionalia.

Dico AB. AC :: potentia in C.E. Nam fiat F = E.



& AB. AC :: H. E. gravit. at AB. AC :: [3] gravitas E ex B. F ex C. æquiponderant igitur E ex B. & H ex C.

Ponatur in C Potentia sustinens pondus H : erit igitur æqualis ipsi H. Quare eadem potentia sustinebit pondus H. Ergo &c.

Aliter demonstratur sic. Fiat AD = AB : & pondus E = F. Et AD. AC :: H. F. æquipond. Reliqua sunt facilia.

1 Utraque per propos.
2 Per 12. E. 5. alternando terminos.
3 Per. 6. libræ.

Coroll. V.

Coroll. V. Quo pondus E propius eſt fulcimento A, eo minor potentia in C ipſum ſuſtinebit.

Coroll. VI. Potentia in C ſemper major eſt pondere E.

Prop. IV. S potentia in B moveat pondus E vecti appenſum ex C puncto; Erit ut Bβ ſpatium potentiæ motæ ad Cγ ſpatium ponderis moti, ſic diſtantia AB à fulcimento ad potentiam, ad diſtantiam AC à fulcimento ad ponderis ſuſpenſionem.

Nam circulorũ circumferentiæ ſunt ut diametri.[1]

Coroll. VII. Ex his manifeſtum eſt Bβ ſpatium potentiæ motæ, ad Cγ ſpatium ponderis moti majorem habere proportionem quam pondus E ad eandem potentiam in B.

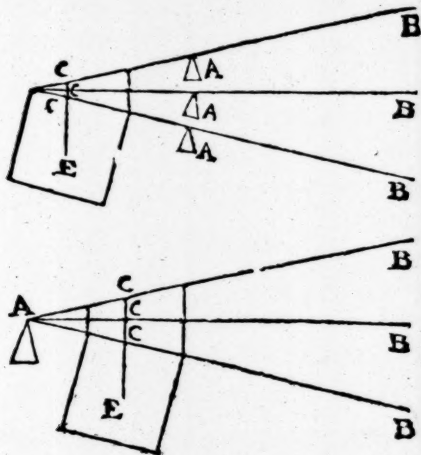
Nam potentia in B movens pondus E neceſſariò

1 Et etiam radii per 15. E. 5. ſed arcus ſimiles (quales ſunt Aγc. ABβ. per 3. cor. 33. E. 6.) ſunt ut circumferentiæ.

major

major esse debet quam potentia sustinens tantum. [1] At vero AB.AC:: E. potentia in B sustinens. Ergo.

Prop. V. Potentia in B vecte sustinens pondus E (cujus centrum gravitatis est E) ad ipsum pondus eandem habebit proportionem quam distantia AC inter fulcimentum & punctum intersectionis lineæ è centro gravitatis perpendicularis plano hori-



zontis cum vecte, ad distantiam AB inter fulcimentum & potentiam.

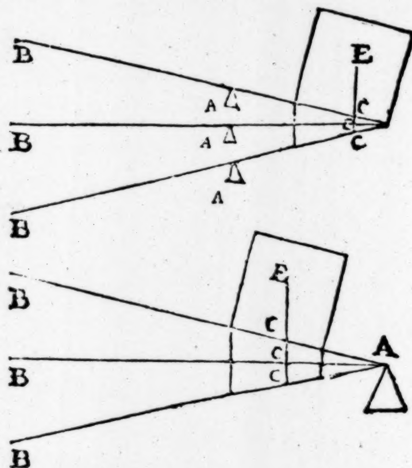
Dico AB. AC :: E. potentia in B.

Nam per ea quæ à Fed. Command. demonstrantur in 6 propos. Archim. de quadra. parabolæ, si

[1] Per. 1. de vecte.

ponderis

ponderis E suspensiones ad vectem solvantur reli-

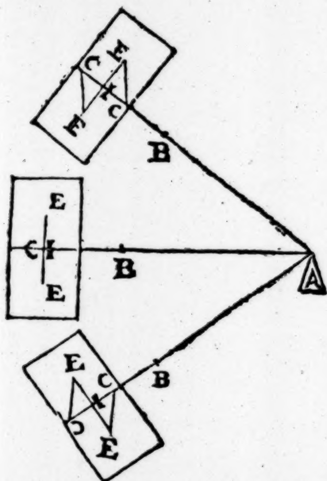


quæ, ipsum tamen pondus ex Puncto C appensum, eodem modo manebit, sicut nunc manet.

Prop. VI. & VII. Lemmata sunt facillima, ideoque omittenda censui.

Prop. VIII. IX. & X. Potentia in B pondus in E sustinens vel etiam movens, si centrum gravitatis supra vectem horizonti æquidistantem habeat, quo magis pondus ab hoc situ vecte elevabitur, majore egebit potentia, quo magis deprimetur, minore. At si centrum gravitatis in ipso vecte habeat,

beat, ſive elevabitur ſive deprimetur, eadem ſemper potentia opus erit.



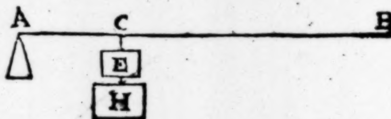
Ratio ſequitur ex Prop. 5. & ex habitudine duarum rectarum EI, EC è centro gravitatis quarum una eſt perpendicularis vecti, altera plano horizontis.

Coroll. VIII. Hinc facile elicitur, quod in omnibus vectis ſitibus potentiæ in B ſuſtinentes pondus, eandem ſemper ad ſe invicem rationem habeant quam diſtantiæ AC in iiſdem ſitibus.

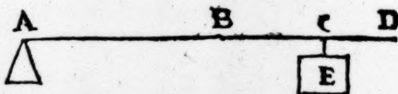
Prop. XI. Si vectis diſtantia AB inter fulcimentum & potentiam ad diſtantiam AC inter fulcimentum & punctum, ubi à centro gravitatis ponderis

E ducta perpendicularis horizonti vectem secat; majorem habuerit rationem quam pondus ad potentiam; pondus à potentia movebitur.

Hoc est si AB. AC ¬· E. potentia in B. Nam fiat AB. AC : : H. potentia in B. [1] Quare pondus H



majus est pondere E. [2] at potentia in B sustinet pondus H. Ergo potentia in B plusquam sustinebit, hoc est movebit pondus E.

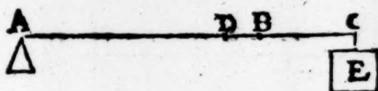


Aliter demonstratur sic Fiat. AB. AD : : E. potentia in B. at AB. AC ¬· E. potentia in B. [3] Quare distantia AD major est distantia AC. [4] At potentia in B sustinet pondus E ex D : Ergo per Corol. 5. Prop. 3. plusquam sustinebit pondus E ex C.

Prop. XII. Datum pondus E à data potentia in B dato vecte ABC movere. Esto datum pondus ut 3 ; & data potentia ut 5 ; quæ posita sit inter fulcimentum A & punctum suspensionis C :

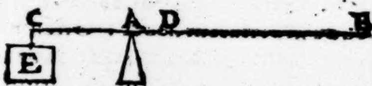
1 10. E. 5. 2 1. hujus. 3 10. E. 5. 4 3. hujus.

In hoc casu: Dividatur AC in D ut AD. AC :: . 5.



In secundo casu. Dividatur AB in D, sic ut AB. AD :: 5. 3.

In tertio casu, Dividatur CB in D sic ut DB. DC :: 5. 3.

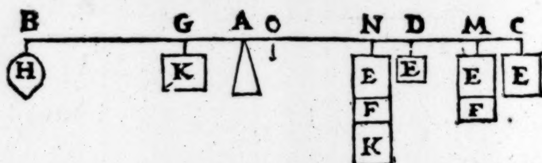


Tum quia in [a] singulis casibus punctum D inventum æquat potentiam ponderi : sumendum est juxta D punctum aliud in quo pondus fiat levius, per Prop. 11.

Prop. 13. Quotcunque datis in vecte ponderibus EFK ubicunq; appensis, puta ex punctis CDG, datoque A fulcimento potentiam invenire, quæ in dato puncto B data pondera sustineat.

a Per. 3. 2. 1. hujus.

Fiat E. F. : : MD. MC. tum EF. K : : NG. NM. Et AB. AN : : EFK. H potentia.[1]

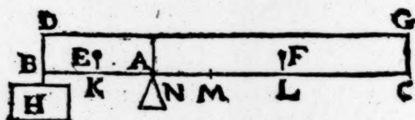


Prop. 14. Quotcunque data in vecte pondera EFK ubicunque appensa, puta ex punctis CDG, à data H potentia in B movere.

Fiat E. F : : MD. MC. Tum EF. K : : NG. NM. Et EFK. H : : AB. AN.

Postremò inter A & N statuatur fulcimentum O.[2]

Prop. XV. Quia dum pondera vecte moventur, vectis quoque gravitatem habet: Ostendendum & quomodo inveniatur potentia, quæ in dato puncto datam vectem super datum fulcimentum A sustineat.



Est vectis BCDG, & partis vectis AD centrum gravitatis E: partis autem AG centrum gravita-

1 Quæ data pondera sustinebit. per 5. libræ. & 1. hu. 2 11. hu

tis

tis F. E quibus rectæ perpendiculares horizonti ducantur EK FL. Suntque partes illæ vectis quasi duo pondera ex punctis KL appensa.

Dividatur KL in M. ut KM. ML : : AG. AD. 1 Jam si potentia collocanda sit in puncto B. Fiat AB. AM : : AD + AG. 2 potentia in B. Si vero potentia collocanda sit in puncto C. Fiat AC. AM :: AD + AG. 3 potentia in C.

Item si pondus H vecti appendatur ex puncto B: potentiaque ponenda sit, ita ut vectem unà cum pondere sustineat.

Invento ut prius puncto M.

Dividatur BM in N, ut BN. NM :: AD + AG.H.

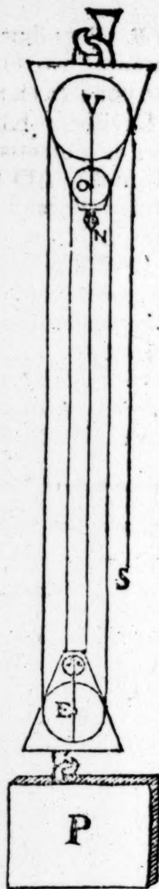
Tum fiat AC.AN :: AD + AG + H.potentia in C.

Vel fiat AB. AN : : AD + AG + H. potentia in B.

1 Quare per 5. libræ, utrumque simul ex M. æquiponderabit, ac si ex punctis K. L. suspendantur seorsim. 2 Quæ sustinebit vectem per. 1. hu. 3 Quæ sustinebit vectem. per 2. hu.

DE

DE TROCHLEA.

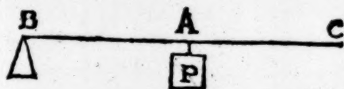


Sit pondus P quod plano horizontis ad rectos angulos sursum sit attollendum. Et (ut fieri solet) Trochlea duos habens orbiculos, quorum axiculi sint OV, superne appendatur: & altera trochlea duos etiam habens orbiculos, quorum axiculi sint AE, infernè ponderi alligetur: ac per omnes utriusque trochleæ orbiculos circumducatur funiculus, qui in altero ejus extremo, puta in N, nodo religetur. Potentia autem sustinens sive movens ponatur in S: quæ dum descendit, pondus sursum ex adverso attollatur.

Problemata demonstranda. 1. Quomodo hoc Trochleæ instrumentum reducatur ad vectem. 2. Cur magnum pondus ab exigua virtute. 3. Et quomodo, 4, quantoque in tempore moveatur. 5. Cur funis in uno capite debet esse religatus. 6. quodque superioris, 7 quodque inferioris trochleæ sit officium. 8. Et quomodo omnis in numeris data propor-

proportio inter potentiam & pondus inveniri possit.

Lemma. Sit vectis CB bifariam divisus in A, cujus fulcimentum sit B: & sit potentia in C, sustinens pondus appensum ex A: Dico potentiam in C æqualem esse resistentiæ fulcimenti: & utramque ponderis esse subduplam. Est enim [1] BC.



BA :: P. potentia in C. at BA = $\frac{1}{2}$ BC. Et quia potentia in C una cum fulcimento in B sustinet pondus P: potentia autem in C est ponderis subdupla, necesse est ut fulcimentum in B saltem æqualiter resistat ponderis gravitati: alioquin sustineri pondus non potuerit, sed deorsum movebitur. Sufficit autem ad ponderis immobilitatem ut æqualiter ipsi potentiæ resistat. Ergo fulcimenti resistentia est etiam ponderis subdupla. Et gravescit pondus super fulcimento æqualiter dimidio sui.

Aliter sic. Loco fulcimenti ponatur in B potentia, una cum potentia in C, sustinens pondus P: [2] utraque ponderis dimidium sustinebit.

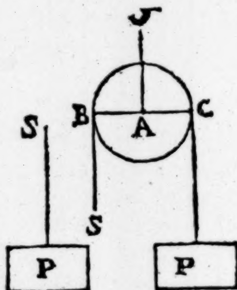
Prop. I. Si funiculus Trochleæ superne appensæ orbiculo circunducatur, alterumque ejus

1 Per 2. hujus. 2 Per 2. 3. corol. 2. hujus.

extre-

extremum ponderi alligetur, alterum à potentia pondus sustinente teneatur: erit potentia ponderi æqualis: poteritque idem pondus ab eadem potentia absque trochleæ hujus auxilio nihilominus sustineri.

Nam quia rectæ CP BS sunt plano horizontis [1] perpendiculares, tanguntque orbiculum in CB,

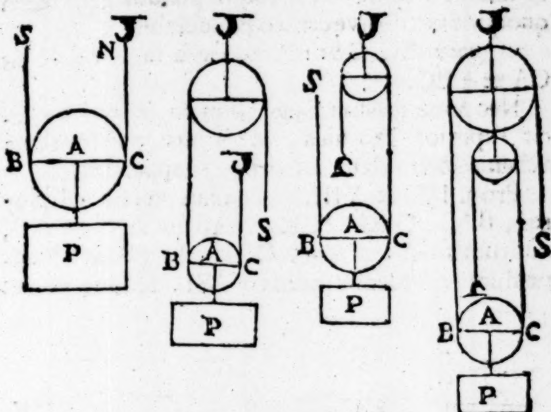


diameter CAB erit [2] parallela horizonti. Estque diameter CAB quasi vectis, habens fulcimentum in centro A. Itaque cum distantia AC = AB: potentiaque in S, hoc est in B, ponderi P appenso ex C [3] æquiponderet: erit potentia in S æqualis ponderi P. Ideoque ipsum absque Trochlea sustinebit.

1 Ex hyp. 2 Per 18. E. 3. & 28. E. 1. 3 Per 1. Vect.

Prop. II.

Prop. 2. & 3. Si funiculus Trochleæ ponderi alligatæ orbiculo circumducatur, alterumque e-



jus extremum alicubi in N religetur, alterum à potentia pondus ſuſtinente detineatur (ſive adhibeatur Trochlea ſuperior ſive non adhibeatur) erit potentia ſuſtinens ponderis ſubdupla.

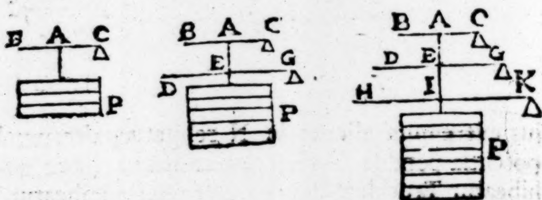
Ratio patet ex Lemmate præmiſſo. Nam cum potentia in S vel B trochlea pondus P ſuſtinere debeat, funiculum ex altero extremo religatum eſſe oportet, puta in N: ita ut N æqualiter ſaltem potentiæ in S vel B reſiſtat: alioquin potentia in S nullatenus pondus ſuſtinere poſſet. Eſtque BAC tanquam vectis: cui inſtar fulcimenti eſt

punctum C, existente funiculo NC immobili: pondus autem ex A appensum, quia trochlea sustinetur axiculo A, ideoque pondus P in eodem quoque axiculo sive centro ponderabit.

1 Quare BC. CA : : P. potentia in B vel S. At CA = ½ BC.

Nec Sane differentiam aliquam in ratione facit superior Trochlea, in tribus posterioribus Schematibus: sicut ex prop. 1. apparebit.

Prop. IV. & VIII. Si sit unus vectis vel plures, BAC, DEG, HIK, bifariam divisi, in AEI, quorum fulcimenta sint CGK, Et pondus P appensum ex mediis punctis AEI, sintque plures



potentiæ æquales; una in mediis illis punctis tanquam uno, reliquæ in singulis terminis BDH, pondus sustinentes: Dico unamquamque ex dictis potentiis seorsim ponderis esse submultiplicem denominatione composita ex unitate & totidem binariis quot sunt vectes, hoc est si unus sit vectis esse subtriplam: si duo sunt vectes

1 Per 2. vect.

esse

esse subquintuplam: si tres subseptuplam, &c.

Nam cum potentia in medio vectium sustineat unam partem denominativam ponderis: sitque potentia æqualis in extremo duplo fortior quam in medio, quoniam est[1] CA. CB :: potentia in B. potentia in A: singulæ potentiæ in extremis sustinebunt binas ejusmodi partes. Ergo.

Prop. VI. Si sint plures vectes BAC DEG HIK, bifariam divisi in AEI, quorum fulcimenta sint CGK & pondus P appensum ex mediis punctis AEI, ita ut ex omnibus æqualiter ponderet, sintque potentiæ æquales in singulis terminis BDH pondus sustinentes: Dico unamquamque ex dictis potentiis seorsim ponderis esse submultiplicem denominatione dupla numero vectium, hoc est si duo sint vectes esse subquadruplam, si tres subsextuplam. &c.

Nam CA. CB :: potentia in B. pars ponderis quam sustinet.

Et GE. GD :: potentia in D. pars ponderis quam sustinet.

Et KI. KH :: potentia in H. pars ponderis quam sustinet.

At vero potentiæ sunt inter se æquales, & subduplæ ad partem ponderis quam sustinent (ut ex proportionibus patet:) Quare unaquæque potentia sustinebit trientem ponderis, & æquivalet sextanti.

1 Per 2. Vect.

Poterat quidem hæc propositio commode conjungi cum 2 præcedentibus.

Prop. V. & IX. Si singulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera superne suspensa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum inferiori trochleæ religatur, alterum à potentia pondus sustinente detinetur: erit potentia ponderis submultiplex denominatione composita ex unitate & totidem binariis, quot sunt in inferiori trochlea orbiculi, hoc est si unus sit orbiculus, subtripla; si duo sint orbiculi, subquintupla; si tres subseptupla, &c. Ratio sequitur ex 4 & lemmate.

Nam funiculus FN est ut potentia sustinens orbiculum ac si in A centro esset: & potentia in S ac si esset in B.

Est igitur BAC tanquam vectis cujus fulcimentum C.

pondus vero P appensum ex A à duabus potentiis una in centro altera in B æqualiter sustentatur. In Superiori enim trochlea diameter FML est tanquam vectis habens fulcimentum in axiculo sive centro M. Ideoque pondera F & L sustinet æqualia: & tam sustinet FN quam LC. Deinde quoniam ex medio vecte BAC pondus P suspenditur, idcirco potentiæ in BC pondus sustinentes sunt æquales:

quare

quare tam ſuſtinebit SB quam LC. funiculi SB FN LC igitur æqualiter pondus ſuſtinebunt. Ergo.

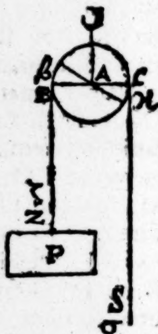
Prop. VII. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne ſuſpenſa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus unum extremum ſupra alicubi religatur, alterum à potentia pondus ſuſtinente detinetur; erit potentia ponderis ſubmultiplex denominatione dupla numero orbiculorum in inferiori trochlea, hoc eſt, ſi unus eſt orbiculus, ſubdupla: ſi duo ſint orbiculi, ſubquadrupla: ſi tres ſubſextupla, &c. Ratio ſequitur ex 6 &lemmate.

Nam diametri orbiculorum BAC DEG FML ſunt tanquam vectes horizonti æquidiſtantes: & quia in vecte FML, fulcimentum eſt M, funiculi FB LD æqualiter ſuſtinent. Et quia pondus dependet ex AE mediis punctis vectium BAC DEG funiculi FB NC æqualiter ſuſtinent: item funiculi SG LD. quare omnes funiculi SG FB NC LD æqualem partem ponderis P ſuſtinent: & pondus in utraque vecte BAC DEG æqualiter ponderabit. Ergo.

Coroll. I. Manifeſtum eſt ex prop. 2. 4. 5.

7. & 9. singulos funiculos trochleam inferiorem pertingentes æqualem totius ponderis partem æqualiter sustinere. Ideoque inferiorem trochleam cui pondus alligatur efficere ut pondus minore potentia sustineatur, quod quidem trochlea superior non efficit.

Prop. X. Si trochleæ sursum appensæ orbiculo funiculus fuerit circumductus, cujus alteri extremo alligatum sit pondus, in altero potentia movens collocata: primò movebit hæc vecte horizonti semper æquidistante.



Nam dum CS tendet in $\kappa\sigma$ remanet semper $CS\sigma$ horizonti perpendicularis, circulumque tangens in puncto C, per centrum A linea horizonti semper parallela, quod idem etiam evenit funiculo BZ & puncto B. Quare dum orbiculus circumvertitur, semper movetur vectis BC, semperque adhuc remanet alter vectis BC horizonti parallelus. Ergo.

Secundo spatium potentiæ pondus moventis æquale est spatio ejusdem ponderis moti. Nam $Z\zeta = S\sigma$.

Tertio eadem potentia idem pondus (sive cum trochlea sursum appensa, sive absque ipsâ tro-

chlea)

chlea) per æquale Spatium in æquali tempore movebit: dummodo lationes velocitate sint æquales.

Prop. XI. & XII. Si trochleæ ponderi alligatæ orbiculo funiculus fuerit circumductus, cujus unum extremum alicubi sursum religetur, alterum à potentia pondus movente detinetur: primò movebit hæc vecte horizonti semper æquidistante.

Nam cum potentia in S dum tendit sursum attollendo orbiculum, semper movetur in recta limea B S σ parallela ipsi NC: etiam orbiculi centrum A in recta linea Z A α movebitur. Ducta recta diamerro β α κ horizonti parallela, orbiculus tanget funiculos BS CN in partibus β κ. Fiat P π = A α. Quando orbiculi centrum est α, pondus P erit in π, & potentia movens S ascendit in σ. Quare dum orbiculus movetur & circumvertitur semper movetur vectis B C, semperque adhuc remanet alter vectis β κ horizonti parallelus. Ergo.

Secundo spatium potentiæ pondus moventis duplum est spatii ejusdem pon-

deris moti. Nam cum funiculus N $\varkappa$ + $\varkappa$ C + CXB + B β + βS = N $\varkappa$ + $\varkappa$ ξ β + βS + S σ. demtis igitur æqualibus restat $\varkappa$C + B β = S σ. Ergo.[1]

Tertiò eadem potentia idem pondus fune circa orbiculum trochleæ ponderi alligatæ, in æquali tempore per dimidium spatium movebit, quam absque trochlea: dummodo lationes velocitate sint æquales. Nam spatium Z ζ = $\frac{1}{2}$ S σ.

Prop. XIV. Et si singulis duarum trochlearum orbiculis quarum altera superne suspensa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum alicubi sursum non quidem superiori trochleæ religatur, alterum à potentia pondus movente detinetur: Erit spatium potentiæ pondus moventis ad spatium ponderis moti multiplex denominatione dupla numero orbiculorum in inferiori trochlea: hoc est, si duo fuerint orbiculi, quadrupla; si tres, sextupla, &c.

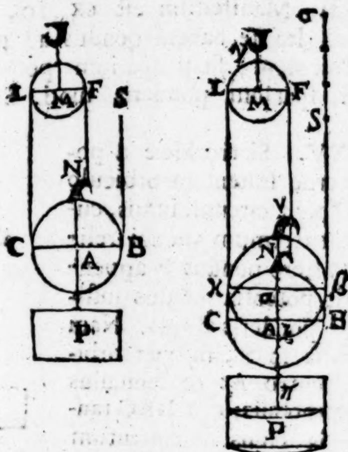
Demonstratio satis manifest. Ex priore.

Prop. XIII. & XIV. Si singulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera superne suspensa, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum inferiori tro-

1 S σ duplum A $\varkappa$ = B β vel KC per 34. E. 1.

chleæ

chleæ religatur, alterum à potentia pondus movente detinetur. Erit spatium potentiæ pondus



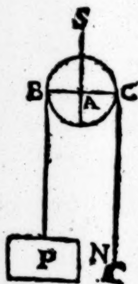
moventis ad spatium ponderis moti multiplex, denominatione composita ex unitate, & totidem binariis quot sunt in inferiori trochlea orbiculi, hoc est, si unus sit orbiculus, tripla; si duo, quintupla; si tres septupla, &c.

Nam fiat $P\pi = A\alpha = N\nu$: Quando uncus N est in ν, erit orbiculi centrum A in α, & pondus P in π & potentia movens S ascendet in σ. Quare

E funiculus

funiculus $N\nu + \underline{\nu F\gamma L\kappa} + \kappa C + \underline{CXB} + B\beta + \underline{\beta S} = \underline{\nu F\gamma L\kappa} + \underline{\kappa\xi\beta} + \underline{\beta S} + S\sigma$. demtis igitur æqualibus restat $N\nu + \kappa C + B\beta = S\sigma$. Ergo.

Coroll. II. Manifestum est ex 10, 11, 12, 13, & 14; Ita se habere pondus ad potentiam ipsam sustinentem, sicut spatium potentiæ moventis ad spatium ponderis moti. Scil: reciproce.



Prop. XV. Si trochleæ à potentia superne sustentatæ orbiculo funiculus fuerit circumductus, cujus unum extremum alicubi religatur, ex altero pondus P appendatur: Erit potentia pondus sustinens ipsius ponderis dupla. Nam quia potentia in S, sustinet orbiculum in centro A: & funiculus N C est immobilis, erit BAC tanquam vectis cujus fulcimentum est C. Quare CB. CA: : potentia in A. P. At CB = 2 CA. ergo.

Aliter sic. Loco unci N, appendatur ex N pondus æquale ipsi P. æqueponderabunt igitur: & potentia in A sustinens ambo, erit ambobus æqualis. Ergo dupla unius.

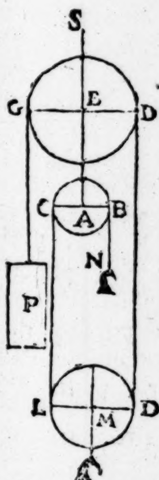
Prop. XVI. Si trochleæ à potentia superne motæ orbiculo funiculus fuerit circumductus, cujus unum extremum alicubi religatur, ex altero pondus appendatur: Primo movebit hæc vecte

horizon-

horizonti semper æquidistante. Et secundo spatium ponderis moti duplum est spatii potentiæ moventis. Quare Tertio, Eadem potentia idem pondus ope unius orbiculi trochleæ superioris sursum motæ in æquali tempore per duplum spatium movebit, quam absque trochlea: dummodo lationes velocitate sunt æquales.

Demonstratio similis erit ei quæ ante ad Prop. XI.

Prop. XVIII. Et si singulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera superne à potentia in S sustentata: altera inferne alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus unum extremum alicubi deorsum non quidem inferiori trochleæ religetur, ex altero pondus appendatur. Erit potentia pondus sustinens ipsius ponderis multiplex, denominatione dupla numero orbiculorum in superiore trochlea: hoc est, si unus sit orbiculus, dupla; ut in 15: si duo orbiculi, quadrupla; si tres sextupla, &c.



In schemate ratio potentiæ ad pondus est quadrupla: Nam potentia in C, sustinens pondus P funiculo CLFDGP, vel potentia in G susti-

nens pondus funiculo GP, [1] æqualis est ponderi, at per 15 potentia in E sustinens pondus P dupla est potentiæ in G: & potentia in A sustinens idem pondus dupla est potentiæ in C. Quare duæ potentiæ in AE duplæ sunt ponderis P. At cum potentia in S orbiculis sustinet pondus P: erit potentia in S ac si duæ essent potentiæ una in A altera in E: & utræque simul pondus sustinerent. Ergo potentia in S ipsius ponderis quadrupla.

Aliter sic. Diametri orbiculorum BAC. DEG. FML sunt tanquam vectes horizonti æquidistantes. Et quia in vecte FML fulcimentum est M, funiculi DF CL æqualiter tenduntur: Et quia in vectibus BAC, DEG fulcimenta sunt AE, funiculi BN CL æqualiter tenduntur: item funiculi DF GP. Quare omnes funiculi DF BN CL GP æqualiter tenduntur à potentia in S è punctis AE tanquam uno: hisce autem tensionibus æqualiter resistunt potentiæ in NFL & pondus P. Ergo Potentia in S equalis est potentiis in NFL & pondus P: hoc est quatuor P ponderibus.

[1] Per. 1 Hu.

Prop.

Prop. XVII. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne à potentia in S ſuſtentata, altera inferne alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus unum extremum ſuperiori trochleæ religatur, ex altero pondus appendatur: Erit potentia pondus ſuſtinens ipſius ponderis multiplex, denominatione compoſita ex unitate & totidem binariis quot ſunt in trochlea ſuperiori orbiculi. hoc eſt, ſi unus ſit orbiculus, tripla; ſi duo, quintupla; ſi tres ſint orbiculi, ſextupla, &c.

In ſchemate ratio potentiæ in S ad pondus P tripla.

Nam ſi duæ eſſent potentiæ pondus P ſuſtinentes, una in A, alteræ in B, erunt utræque ſimul triplæ ponderis P. potentia enim in B eſt æqualis ponderi P, & potentia in A ipſius dupla. at potentia in S eſt utrique æqualis quia ſola pondus ſuſtinet. Ergo.

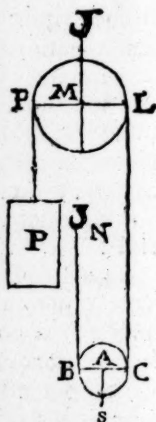
Aliter ſic. Diametri orbiculorum BAC FML, ſunt tanquam vectes horizonti æquidiſtantes. Et quia in vecte FML fulcimentum eſt M, funiculi FN LC æqualiter tenduntur. Et quia in vecte BAC fulcimentum eſt A funiculi BP NF CL æqualiter tenduntur à potentia in S. hiſce autem

tenſio-

tensionibus æqualiter resistunt potentiæ in punctis FL & pondus P. Ergo potentia in S æqualis est omnibus, hoc est tribus P ponderibus.

Ad Prop. XVII. & XVIII. Item si S sit potentia movens pondus: Erit spatium ponderis moti tam multiplex spatii potentiæ moventis.

Prop. XIX. Si singulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera superne suspensa, altera inferne à potentia sustinente detenta fuerit, circumducatur funiculus, cujus alterum extremum alicubi sursum non quidem superiori trochleæ religatur, ex altero pondus appendatur, Erit potentia in S pondus P sustinens ipsius ponderis multiplex denominatione dupla numero orbiculorum in inferiore trochlea: hoc est, si unus sit orbiculus, dupla; si duo quadrupla, &c.



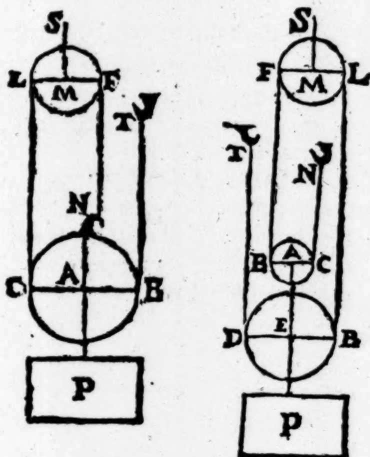
Nam cum per 3, Potentia in P sustinens pondus appensum ex S æquale ipsi P subdupla sit ejusdem ponderis: potentia in S æqualis eidem ponderi sustinebit pondus P potentiæ in P æquale: ponderisque P dupla erit.

Aliter

Aliter ſic, Potentia in C [1] æqualis eſt ponderi P. Quare in vecte B A C cujus fulcimentum B ſit pondus appenſum ex C potentia in S vel A ſuſtinens pondus erit per 15, dupla ipſius ponderis.

Item ſi in S ſit potentia movens, erit ſpatium ponderis P moti duplum ſpatii potentiæ in S pondus moventis.

Prop. XX. & XXI. Generaliter ſic tradentur. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis quarum



altera ſuperne à potentia ſuſtentata, altera inferne

1 Per 1. hu.

ponderi

ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus, cujus unum extremum alterutri trochleæ religatur, alterum alicubi sursum: Erit potentia in S ad pondus P, ut numerus funiculorum pertingentium superiorem trochleam, ad numerum funiculorum pertingentium inferiorem.

Nota quod impar funiculus pertingit illam trochleam cui funiculi extremum religatur.

In primo schemate ratio est subsesquialtera sive 2 ad 3.

In secundo schemate ratio est subsesquitertia, sive 3 ad 4.

Nam (20) cum [1] singuli funiculi LC, NF, BT sustinent tertiam partem ponderis P.

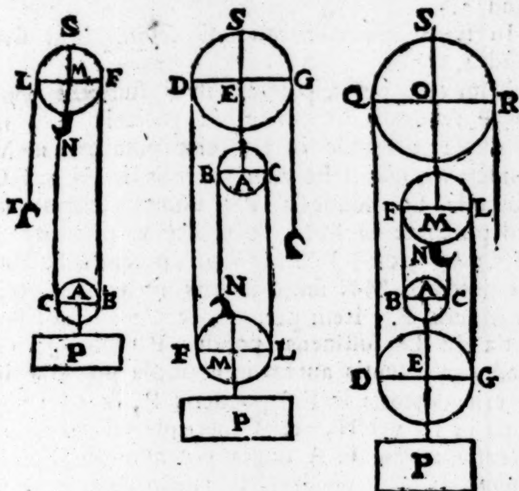
Erit utraque potentia CN subtripla ponderis P. At potentia in S utrique est æqualis, quare potentia in S est $\frac{2}{3}$ ponderis P. Ergo.

Nam (21) cum singuli funiculi BL CN, BF DT sustineant quartam partem ponderis P, erunt tres potentiæ BBC subquadruplæ ponderis P: at potentia in S est tribus æqualis, quare potentia in S est $\frac{3}{4}$ ponderis P. Ergo.

1 Per 7. hu.

Prop. XXII.

Prop. XXII. Generaliter ſic tradi potuerit. Si ſingulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera ſuperne à potentia ſuſtenta, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus,



cujus unum extremum alterutri trochleæ religarur, alterum alicubi deorſum : Erit potentia in S ad pondus P ut numerus funiculorum pertingentium ſuperiorem trochleam, ad numerum funiculorum pertingentium inferiorem.

Nota quod impar funiculus pertingit illam trochleam cui funiculi extremum religatur.

In primo schemate ratio est sesquialtera sive 3 ad 2.

In secundo schemate ratio est sesquitertia sive 4 ad 3.

In tertio schemate ratio est sesquiquarta sive 5 ad 4.

Nam cum per 2 potentia in F sustinens pondus P subdupla sit ponderis: potentia vero in M dupla potentiæ in F: erit potentia in M ponderi æqualis. Et cum potentia in N vel C subdupla sit ponderis P: erunt utræque simul potentiæ in MN sesquialteræ ponderis P (scil: $\frac{2}{2} + \frac{1}{2}$ est $\frac{3}{2}$) Ergo cum potentia S duabus potentiis MN simul sumtis sit æqualis, erit $\frac{3}{2}$ ponderis P. Item per 13, & Coroll. 2, Potentia in D sustinens pondus P [1] subtripla est ponderis: potentia autem in E dupla potentiæ in D, erit potentia in E $\frac{2}{3}$ ponderis P, & cum potentia in M vel N, vel B subtripla est ponderis: potentia autem in A dupla potentiæ in B, erit potentia in A $\frac{2}{3}$ ponderis P, Ergo duæ potentiæ in AE simul sumtæ (hoc est potentia in S) sunt $\frac{4}{3}$ ponderis P.

Item si in S sit potentia movens erit spatium ponderis moti ad spatium potentiæ moventis in simili ratione.

1 Per 1. cor. hu.

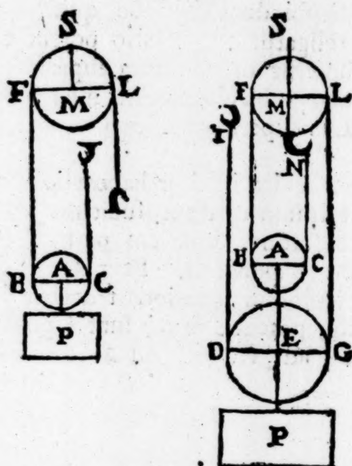
Prop. XXIII.

Prop. XXIIII. Et si singulis duarum trochlearum orbiculis quarum altera superne à potentia sustenta, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus utrumque extremum alicubi deorsum non quidem superiori trochleæ religatur: Erit ratio potentiæ ad pondus ut numerus orbiculorum superiore trochlea ad numerum orbiculorum in inferiore, hoc est, si tres sint in superiore & duo in inferiore sesquialtera, &c.

Nam si trochlea inferior habeat duos orbiculos, pertingunt ipsum quatuor funiculi, quorum unusquisque sustinet [a] quartam partem ponderis: omnes sunt $\frac{4}{4}$ ponderis. Et potentiæ in centris trium orbiculorum superioris trochleæ simul sumtæ (hoc est, potentia in S) sunt $\frac{3}{2}$ ponderis: ratio autem $\frac{3}{2}$ ad $\frac{4}{4}$ est ut 3 ad 2.

a Per 1. Cor. hu.

Prop. XXIIII. Si singulis duarum trochlearum orbiculis quarum altera superne à potentia sustenta, altera inferne ponderi alligata fuerit,



circumducatur funiculus, cujus unum extremum alicubi sursum, alterum alicubi deorsum non quidem trochleis religatur: Erit potentia ponderi æqualis.

Nam potentia in T vel F vel B sustinens pondus P est subdupla ponderis; potentia autem in M vel S dupla potentiæ in F. Erit potentia in S æqualis ponderi.

Nam

At trochlea disposita ut in schem. 2. si in F L duæ essent potentiæ pondus P sustinentes, foret per 7, utraque seorsim subquadrupla ponderis: potentia autem in S dupla est utriusque potentiæ in F L seorsim: quare potentia in S æqualis est potentiis in F L simul sumtis. Ergo potentia S est $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \frac{2}{4}$ ponderis P.

Item si S sit potentia movens erit spatium ponderis moti ad spatium potentiæ moventis in simili ratione.

Motus hic sic fit. Vectis B A C fulcimentum est C. potentia in B vel F, pondus in A: Vectis D E G fulcimentum in D, potentia in G vel L pondus in E. Et quia potentiæ in F L sunt æquales, vectis F L in neutram movebitur partem, ideoque nec orbiculus circumvertetur, sed tantum directe ascendet.

Prop. XXV. Si singulis duarum trochlearum orbiculis, quarum altera superne à potentia sustenta, altera inferne ponderi alligata fuerit, circumducatur funiculus cujus utrumque extremum alicubi sursum non quidem superiori trochleæ religatur, Erit ratio potentiæ ad pondus sicut numerus orbiculorum superioris trochleæ ad numerum orbiculorum inferioris. hoc est, si

duo

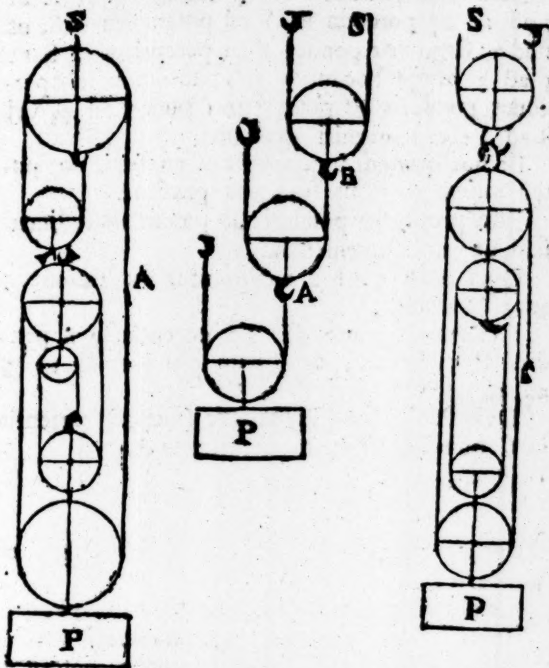
duo orbiculi ſunt in ſuperiore trochlea, & tres in inferiore ſubſeſquialtera, &c.

Nam ſi trochlea inferior habeat tres orbiculos, pertingunt ipſam ſex funiculi, quorum unuſquiſque ſuſtinet ſextam partem ponderis: Quatuor igitur funiculi qui pertingunt ſuperiorem trochleam ſuſtinebunt $\frac{4}{6}$ ſive $\frac{2}{3}$ ponderis.

Vel ſi in B G eſſent duæ potentiæ pondus P ſuſtinentes, foret per 2 utraque ſubdupla ponderis P: potentia autem in A dupla eſt potentiæ in B, & potentia in E dupla eſt potentiæ in G, quare potentiæ duæ in AE ſimul ſumtæ (hoc eſt potentia in S) duplæ ponderis P. Item ſi in S ſit potentia movens erit ſpatium ponderis moti ad ſpatium potentiæ moventis in ſimili ratione.

Prop. XXVI.

Prop. XXVI. Proportionem ſuperpartientem invenire. Eſto proportio ponderis ad potentiam ſuſtinentem ut 5 ad 3 invenienda.



Exponatur per 9 potentia in A pondus P ſuſtinens, ſic ut potentia ponderis ſit ſubquintupla.

Deinde eodem funiculo circa alios orbiculos circumducto inveniatur per 17 potentia in S quæ tripla sit potentiæ in A.

Nam quia pondus P ad potentiam in A est ut 5 ad 1: Et potentia in A ad potentiam in S, ut 1 ad 3: Ergo erit pondus P ad potentiam in S ut 5 ad 3. atque hoc modo reliquæ omnes proportiones ponderis ad potentiam (puta 7 ad 4, vel 8 ad 3 &c.) inveniri poterunt.

Et hoc quidem unico factum est funiculo: potest autem pluribus funiculis præstari.

Esto proportio ponderis ad potentiam sustinentem, ut 5 ad 2 invenienda.

Quia ratio 5 ad 2 componitur ex ratione 5 ad 4 & 4 ad 2.

Exponatur primo per 22 potentia in A pondus P sustinens, ad quam pondus sit ut 5 ad 4.

Deinde alio fune inveniatur (per 2) potentia in C quæ subdupla sit potentiæ in A.

Nam quia P. A :: 5. 4 }
Et A. S :: 4. 2 } Ergo

In hoc exemplo potentia in S suboctupla est ponderis P.

At potentia in B subquadrupla ponderis P.

Item potentia in A subdupla ponderis.

Atque hoc modo minui potentia poterit in infinitum subduplando.

Prop. XXVII.

Prop. XXVII. Datum pondus à data potentia trochleis movere. Esto datum pondus ut 60: potentia vero ut 13: per 9 Inveniatur potentia sustinens pondus, ad quam pondus sit ut 60 ad 12 (hoc est, ut 5 ad 1) Quoniam igitur potentia ut 12 sustinet pondus datum, potentia ut 13 ipsum movebit.

Prop. XXVIII. Propositum sit efficere potentiam pondus moventem, & pondus, per data spatia sibi invicem commensurabilia moveri.

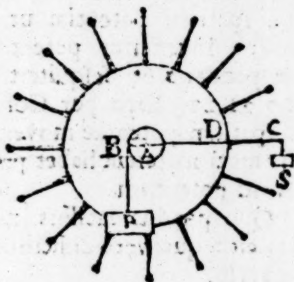
Esto datum spatium potentiæ ut 3, ponderis vero ut 4. Inveniatur potentia sustinens pondus, quæ ponderis sit sesquitertia (hoc autem fit per 20 21 22) Ergo per Coroll. 2.

Coroll. 3. spatium potentiæ moventis, ad spatium ponderis moti majorem habet proportionem quam pondus ad potentiam.

Coroll. 4. Quo pondus facilius movetur, eo tempus majus est: quo vero difficilius, eo minus est. Et è converso.

De Peritrochio.

Peritrochii axis eſt qui duobus ſuſtentaculis nititur; ejus centrum A, ſemidiameter AB Axi autem orbis, in quo ſunt Scytalæ, quod tympanum dicitur affigitur: ita ut moto tympano per ſcytalas moveatur & axis.



Axi etiam pondus appenditur fune, qui axi religatur, & dum pondus ſurſum movetur circa axem revolvitur: [1] Potentia S pondus P ſuſtinens axe in Peritrochio, eſt ad pondus, ut ſemidiameter axis AB, ad ſemidiametrum tympani una cum ſcytala AD + DC.

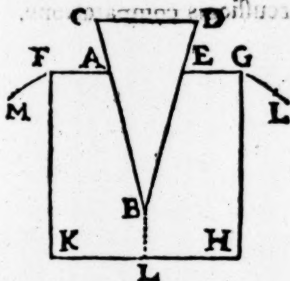
1 Per 1. Vec.

DE CUNEO.

Cuneus in scindendo pondere est instar duorum vectium sibi invicem contrariorum.

Duo Vectes contrarii sunt BAC BED, in quibus considerari potest potentia in CD: fulcimentum in B, & pondera in AE vel potius fulcimenta in AE: & pondus in B.

Dum Cuneus findit lignum FGHK basis puncta HK immota sunt centra motus punctorum GF quæ in fissura moventur per arcus GL FM.



Quoniam totus cuneus scindendo movetur, possumus ipsum aliter considerare: nempe ut unum cunei latus sit in plano horizontis, alterum inclinatum horizonti: & id quod scinditur,

nihil aliud ſit niſi pondus ſuper planum horizonti inclinatum movens.

Duo efficiunt ut aliquod cuneo facilius ſcindatur.

Primum eſt angulus ad verticem cunei, quo enim minor eſt angulus, eo facilius movet ac ſcindit.

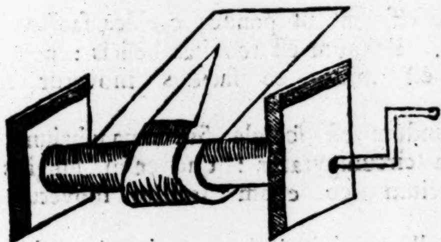
Secundum eſt percuſſio qua cuneus movetur, & movet: hoc eſt percutitur & ſcindit.

Percuſſionis mirifica vis eſt: ſi enim ſupra cuneum maximum ponatur onus; vel etiam ſi cuneo vectis, aut cochlea, aliudve quodvis inſtrumentum aptetur ad cuneum ponderi imprimendum, nullius fere erit momenti, preſertim ictus ſive percuſſionis comparatione.

DE

DE COCHLEA.

Pappus Lib. VIII. Mathematicarum collectionum dicit Cochleam nihil aliud esse præter assumtum cuneum percussionis expertem, vecte (seu manubrio) motionem facientem.



Nam dum cylindrus cum cuneo ipsi circumplicato, manubrio circum agitur : densior cunei pars continuo subingrediens corpus scindendum majorem in ipso fissuram facit donec tandem totum disrumpitur. Quare cuneus hoc modo circa cylindrum accommodatus, nihil aliud est nisi cochlea duas habens helices in uno puncto conjunctas.

Cochlea vel movetur in cylindro concavo cui incisæ sunt helices congruentes iis quæ in ipsa cochlea: atque ideo mater sive cochlea fœmina dicitur.

Vel

Vel movet tylum cochleæ superimpositum: quod quidem inferiore plano habeat helices concavas apposite admodum cochleæ aptatas.

Vel denique circumagit tympanum sive orbem dentibus obliquis, vel etiam rectis, ita constructis ut facile cum cochlea conveniant, dentatum.

Duo efficiunt ut pondus cochlea facilius moveatur. Primum est tenuitas helicis: nam quo helix est minor, eo facilius movetur cochlea.

Secundum est scytala sive manubrium quo cochlea circumgyratur: quo enim longius est manubrium eo etiam facilius movetur cochlea.

Coroll. quo igitur plures helices in cochlea, & quo longiores scytalæ, eo pondus facilius quidem, tardius autem movetur.

Ex

Ex promoto Archimede.

Marini Ghetaldi.

I. SI quatuor magnitudines sint proportionales, sitque secunda homogenea primæ, & quarta tertiæ, ipsarum etiam gravitates similiter proportionales erunt.

II. Si è quatuor corporibus gravibus, S. G. s. g. quorum tertium est homogeneum primo, & quartum secundo; primum & secundum fuerint magnitudine æqualia, tertium vero & quartum æquè gravia. Erit, ut gravitas primi ad gravitatem secundi, sic gravitas liquidi. m æqualis magnitudine corpori quarto, ad gravitatem liquidi w æqualis tertio. Dico gravitas S. G : : gravitas m. w.

Accipitur W liquidum homogeneum m, & w; & æquale magnitudine. S vel G.

Nam per 1 } Gravitas g (æq: grave. s) G :: m. W } gravitas S. s (æq: grave. g) : : W. w } Ergo.

III. Erit etiam reciproce ut gravitas primi ad gravitatem secundi, sic magnitudo quarti ad magnitudem tertii.

Dico gravitas S. G : : magn : g. s.

Nam per 2. gravitas S. G : : m. w : : magnit. g. s. per 1. Ergo.

IV. Corpora

IV. Corpora solida graviora liquido, erunt in liquido tanto leviora, quanta est gravitas liquidi æque magni atque solidum corpus. Archim: prop. 7. 1. de iis quæ vehuntur in aqua. Atque hinc

V. Primo invenitur gravitas liquidi per gravitatem corporis solidi datam. Esto corpus plumbeum gravitatis 23, quod sic in aqua ponderandum est: Ex altera libræ lance appendatur corpus illud plumbeum seta equina, in altera lance ponantur pondera: & corpus appensum demittatur in aquam, ita ut in aqua libere pendeat, aqua neutram lancem contingente. hoc modo corpus plumbeum gravitatis 23 invenietur in aqua habere gravitatem 21. Erit igitur gravitas aquæ magnitudine æqualis corpori plumbeo dato 23 - 21 nempe 2.

Iterum sit corpus cereum (quod quidem aqua levius est) gravitatis 21: & alterum plumbeum gravitatis 23: utriusque igitur gravitas est 44: utrumque conjunctum in aqua ponderatum gravitatem 20 habeat: itaque gravitas aquæ habentis magnitudinem utrique æqualem erit 44 - 20. At vero gravitas aquæ æqualis corpori plumbeo inventa fuit 2. Ergo gravitas aquæ ipsi ceræ æqualis erit 44 - 20 - 2, hoc est 22.

Atque hoc modo corpora solida ponderabuntur etiam in vino vel oleo.

Si vero propositum sit argentum vivum gra-

vitatis

vitatis 95, cui æqualis aquæ gravitatem quærere oporteat: accipiatur vas vitreum v. g. 91. ipsumque vas plenum aqua ponderetur in aqua, & habeat gravitatem 55: sit igitur aquæ æqualis vasi gravitas 91 - 55, scil. 36. Ponatur deinde in ipsum vas argentum vivum: Erit argenti vivi una cum vitro gravitas 95 + 91, scil. 186, extra aquam: at in aqua ponderabit 143: Est igitur gravitas aquæ æqualis argento vivo simul cum vase 186 - 143, scil: 43, sed gravitas aquæ æqualis vasi fuit 36: Ergo gravitas aquæ æqualis argento vivo est 43 - 36, scil: 7.

VI. Secundo invenitur gravitas solidi per gravitatem liquidi datam.

Esto vas aliquod plenum aqua, cujus gravitas est 100: si repleatur plumbo quanta erit gravitas? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua per V^am^ inventa est habere gravitatem 2: dic 2. 23 : : 100. 1150: hæc erit gravitas plumbi implentis vas, sive æqualis aquæ propositæ.

Si vero de ceræ gravitate quæratur: Quia corpori cereo gravitatis 21 æqualis aqua per V^am^ inventa est habere gravitatem 22: dic 22. 21 : : 100. $95\frac{5}{11}$: hæc erit gravitas ceræ implentis vas sive æqualis aquæ propositæ.

VII. Tertio invenitur magnitudo liquidi per corporis solidi magnitudinem datam.

Esto corpus plumbeum magnitudinis 10, quanta

erit magnitudo aquæ gravitatem habentis eandem cum corpore illo plumbeo? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua gravitatem habet 2, Erit reciproce per III^{am} hujus ut gravitas aquæ ad gravitatem plumbi, sic magnitudo plumbi ad magnitudinem aquæ æquiponderantis quæsitam, hoc est 2. 23 :: 10. 115.

Sed si corpus plumbeum sit sphæra è diametro data 10, cujus cubus est 1000: dicetur 2. 23 :: 1000. 11500. qui cubus est è diametro sphæræ aqueæ.

VIII. Quarto invenitur magnitudo corporis solidi per liquidi magnitudinem.

Esto aqua magnitudinis 115: quanta erit magnitudo plumbi gravitatem habentis eandem cum aqua proposita? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua gravitatem habet 2. Erit reciproce per III^{am} hujus 23. 2 :: 115. 10: hæc erit magnitudo plumbi æqualis æquæ propositæ.

Sed si corpus aqueum sit sphæra è diametro data 10 cujus cubus est 1000: dicatur 23. 2 :: 1000. $86\frac{22}{23}$: qui cubus est è diametro sphæræ plumbeæ.

IX. Quinto invenitur gravitas corporis solidi unius generis per gravitatem corporis solidi alterius generis datam. Esto corpus plumbeum gravitatis 46: quanta erit gravitas stanni magnitu-

dinem

dinem habentis eandem cum corpore illo plumbeo? Quia corpori plumbeo gravitatis 23 æqualis aqua gravitatem habet 2: corpori autem ſtanneo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habere invenitur 5: corpori item plumbeo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habebit $\frac{74}{23}$. Erit igitur per 11 hujus 5. $\frac{74}{23}$: : 46. $\frac{14}{5}$ ($29\frac{1}{5}$): hæc erit gravitas ſtanni magnitudinem habentis eandem cum plumbo propoſito.

Similis erit operatio, ſi pro alterutro ſolido ponatur argentum vivum.

X. Sexto invenitur magnitudo corporis ſolidi unius generis per magnitudinem corporis ſolidi alterius generis datam. Eſto corpus plumbeum magnitudinis 10: quanta erit magnitudo ſtanni gravitatem habentis eandem cum corpore illo plumbeo? Quia corpori plumbeo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habuit $\frac{74}{23}$: corpori autem ſtanneo gravitatis 37 æqualis aqua gravitatem habet 5, Erit per 11 hujus $\frac{74}{23}$. 5 : : 10. $15\frac{20}{37}$. vel etiam ſic; Quia corpori plumbeo gravitatis 46 æquale ſtannum gravitatem habet $\frac{148}{5}$ per IX hujus; Erit reciproce per III hujus $\frac{148}{5}$. 46 : : 10. $15\frac{20}{37}$. hæc erit magnitudo ſtanni gravitatem habentis eandem cum plumbo propoſito.

Sed ſi corpus plumbeum ſit ſphæra è diametro 10, cujus cubus eſt 1000: dicetur $\frac{74}{23}$. 5: vel $\frac{148}{5}$. 46 : : 1000. $1554\frac{2}{37}$; qui cubus eſt è diametro ſphæræ ſtanneæ quæſitæ.

Similis erit operatio, si pro alterutro solido ponatur argent: vivum.

XI. Septimo invenitur gravitas corporis liquidi unius generis per gravitatem corporis liquidi alterius generis datam. Esto oleum gravitatis 550: quanta erit gravitas aquæ magnitudinem habentis eandem cum oleo proposito? Quia corpori plumbeo gravitatis v g: 138 æqualis aqua gravitatem habet 12: æquale aut oleum invenitur per V^am^ hujus gravitatem habere 11: Erit reciproce per III hujus 11. 12:: 550. 600: hæc erit gravitas aquæ æqualis oleo proposito.

Si pro alterutro liquido ponatur argentum vivum, consulas V^am^ hujus.

XII. Octavo invenitur magnitudo corporis liquidi unius generis per magnitudinem corporis liquidi alterius generis datam.

Esto oleum magnitudinis 600: quanta erit magnitudo aquæ gravitatem habentis eandem cum oleo proposito? Quia corpori plumbeo gravitatis, puta 138, æqualis aqua gravitatem habet 12, æquale autem oleum 11. Erit reciproce per III^am^ hujus 12. 11:: 600. 550: hæc erit aquæ æqualis oleo proposito magnitudo.

Similis erit operatio, si pro alterutro liquido ponatur argentum vivum: consules autem V^am^ hujus ad finem, ubi de argento vivo ponderando agitur.

XIII. Sphæ-

	Aurum	Arg: vi:	Plumbum	Argent	Æs	Ferrum	Stannum	Mel	Aqua	Vinum	Cera	Oleum
Oleum	$20\frac{8}{11}$	$14\frac{62}{77}$	$12\frac{6}{11}$	$11\frac{3}{11}$	$9\frac{2}{11}$	$8\frac{2}{11}$	$8\frac{4}{55}$	$1\frac{32}{55}$	$1\frac{1}{11}$	$1\frac{4}{55}$	$1\frac{1}{121}$	$\frac{1}{100}$
Cera	$19\frac{12}{21}$	$14\frac{32}{147}$	$12\frac{1}{21}$	$10\frac{52}{63}$	$9\frac{2}{21}$	$8\frac{2}{21}$	$7\frac{89}{105}$	$1\frac{109}{210}$	$1\frac{1}{21}$	$1\frac{13}{420}$	$\frac{1}{100}$	$96\frac{2}{63}$
Vinum	$19\frac{12}{59}$	$13\frac{311}{413}$	$11\frac{41}{59}$	$10\frac{30}{59}$	$9\frac{2}{59}$	$8\frac{8}{59}$	$7\frac{31}{59}$	$1\frac{28}{59}$	$1\frac{1}{59}$	$\frac{1}{100}$	$97\frac{47}{649}$	$93\frac{13}{59}$
Aqua	19	$13\frac{4}{7}$	$11\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{3}$	9	8	$7\frac{2}{5}$	$1\frac{9}{20}$	$\frac{1}{100}$	$98\frac{1}{3}$	$95\frac{1}{11}$	$91\frac{2}{3}$
Mel	$13\frac{1}{29}$	$9\frac{71}{203}$	$7\frac{27}{29}$	$7\frac{13}{87}$	$6\frac{6}{29}$	$5\frac{15}{29}$	$5\frac{3}{29}$	$\frac{1}{100}$	$68\frac{28}{29}$	$67\frac{71}{87}$	$65\frac{265}{319}$	$63\frac{19}{87}$
Stannum	$2\frac{31}{37}$	$1\frac{231}{259}$	$1\frac{41}{74}$	$1\frac{44}{111}$	$1\frac{8}{37}$	$1\frac{1}{37}$	$\frac{1}{100}$	$19\frac{27}{37}$	$13\frac{19}{37}$	$13\frac{38}{111}$	$12\frac{266}{407}$	$12\frac{43}{111}$
Ferrum	$2\frac{1}{8}$	$1\frac{19}{56}$	$1\frac{7}{16}$	$1\frac{7}{24}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{100}$	$92\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{8}$	$12\frac{1}{2}$	$12\frac{7}{24}$	$11\frac{41}{44}$	$11\frac{11}{24}$
Æs	$2\frac{1}{9}$	$1\frac{32}{63}$	$1\frac{5}{18}$	$1\frac{4}{27}$	$\frac{1}{100}$	$88\frac{8}{9}$	$82\frac{8}{9}$	$16\frac{1}{9}$	$11\frac{1}{9}$	$10\frac{25}{27}$	$10\frac{20}{33}$	$10\frac{5}{27}$
Argent.	$1\frac{26}{31}$	$1\frac{68}{217}$	$1\frac{7}{62}$	$\frac{1}{100}$	$87\frac{1}{31}$	$77\frac{13}{31}$	$71\frac{12}{31}$	$14\frac{1}{31}$	$9\frac{27}{31}$	$9\frac{16}{31}$	$9\frac{81}{341}$	$8\frac{27}{31}$
Plumbum	$1\frac{14}{23}$	$1\frac{32}{161}$	$\frac{1}{100}$	$89\frac{59}{69}$	$78\frac{6}{23}$	$69\frac{11}{23}$	$64\frac{8}{23}$	$12\frac{19}{23}$	$8\frac{16}{23}$	$8\frac{18}{69}$	$8\frac{76}{253}$	$7\frac{67}{69}$
Arg: vi:	$1\frac{18}{95}$	$\frac{1}{100}$	$84\frac{14}{19}$	$76\frac{8}{57}$	$66\frac{6}{19}$	$58\frac{18}{19}$	$54\frac{12}{19}$	$10\frac{11}{19}$	$7\frac{7}{19}$	$7\frac{14}{57}$	$7\frac{7}{209}$	$6\frac{41}{57}$
Aurum 3990	$\frac{1}{100}$	$71\frac{3}{7}$	$60\frac{12}{19}$	$54\frac{32}{57}$	$47\frac{2}{19}$	$42\frac{2}{19}$	$38\frac{18}{19}$	$7\frac{12}{19}$	$5\frac{5}{19}$	$5\frac{10}{57}$	$5\frac{5}{209}$	$4\frac{42}{57}$

	Aurum	Arg : vi :	Plum-bum	Argent	Æs	Ferru[m]
Oleum	20 $\frac{8}{11}$	14 $\frac{62}{77}$	12 $\frac{6}{11}$	11 $\frac{1}{11}$	9 $\frac{2}{11}$	8 $\frac{8}{11}$
Cera	19 $\frac{12}{21}$	14 $\frac{12}{147}$	12 $\frac{1}{21}$	10 $\frac{52}{63}$	9 $\frac{2}{21}$	8 $\frac{8}{21}$
Vinum	19 $\frac{12}{59}$	13 $\frac{311}{413}$	11 $\frac{41}{59}$	10 $\frac{30}{59}$	9 $\frac{2}{59}$	8 $\frac{8}{59}$
Aqua	19	13 $\frac{4}{7}$	11 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{3}$	9	8
Mel	13 $\frac{1}{29}$	9 $\frac{71}{203}$	7 $\frac{27}{29}$	7 $\frac{11}{87}$	6 $\frac{6}{29}$	5 $\frac{1}{2}$…
Stannum	2 $\frac{21}{37}$	1 $\frac{221}{259}$	1 $\frac{41}{74}$	1 $\frac{44}{111}$	1 $\frac{8}{37}$	1 $\frac{1}{37}$
Ferrum	2 $\frac{1}{8}$	1 $\frac{19}{56}$	1 $\frac{7}{16}$	1 $\frac{7}{24}$	1 $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$…
Æs	2 $\frac{1}{9}$	1 $\frac{12}{63}$	1 $\frac{5}{18}$	1 $\frac{4}{27}$	$\frac{1}{100}$	88
Argent.	1 $\frac{26}{31}$	1 $\frac{68}{217}$	1 $\frac{7}{62}$	$\frac{1}{100}$	87 $\frac{1}{31}$	77
Plum-bum	1 $\frac{15}{23}$	1 $\frac{29}{161}$	$\frac{1}{100}$	89 $\frac{59}{69}$	78 $\frac{6}{23}$	69
Arg : vi :	1 $\frac{38}{95}$	$\frac{1}{100}$	84 $\frac{14}{19}$	76 $\frac{8}{57}$	66 $\frac{6}{19}$	58
Aurum 3990	$\frac{1}{100}$	71 $\frac{3}{7}$	60 $\frac{12}{19}$	54 $\frac{22}{57}$	47 $\frac{2}{19}$	42

PAG. 61.

	Ferrum	Stannum	Mel	Aqua	Vinum	Cera	Oleum
	$8\frac{2}{11}$	$8\frac{4}{55}$	$1\frac{12}{55}$	$1\frac{1}{11}$	$1\frac{4}{55}$	$1\frac{1}{121}$	$\frac{1}{100}$
	$8\frac{2}{21}$	$7\frac{89}{105}$	$1\frac{109}{210}$	$1\frac{1}{21}$	$1\frac{11}{420}$	$\frac{1}{100}$	$96\frac{2}{63}$
	$8\frac{8}{59}$	$7\frac{31}{59}$	$1\frac{28}{59}$	$1\frac{7}{59}$	$\frac{1}{100}$	$97\frac{47}{649}$	$93\frac{13}{59}$
	8	$7\frac{2}{5}$	$1\frac{9}{20}$	$\frac{1}{100}$	$98\frac{1}{3}$	$95\frac{5}{11}$	$91\frac{2}{3}$
	$5\frac{15}{29}$	$5\frac{1}{29}$	$\frac{1}{100}$	$68\frac{28}{29}$	$67\frac{71}{87}$	$65\frac{265}{319}$	$63\frac{19}{87}$
	$1\frac{1}{37}$	$\frac{1}{100}$	$19\frac{27}{37}$	$13\frac{19}{37}$	$13\frac{38}{111}$	$12\frac{166}{407}$	$12\frac{41}{111}$
	$\frac{1}{100}$	$92\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{8}$	$12\frac{1}{2}$	$12\frac{7}{24}$	$11\frac{41}{44}$	$11\frac{11}{24}$
0	$88\frac{8}{9}$	$82\frac{2}{9}$	$16\frac{1}{9}$	$11\frac{1}{9}$	$10\frac{25}{27}$	$10\frac{20}{33}$	$10\frac{5}{27}$
$\frac{}{31}$	$77\frac{12}{31}$	$71\frac{19}{31}$	$14\frac{7}{31}$	$9\frac{27}{31}$	$9\frac{16}{31}$	$9\frac{81}{341}$	$8\frac{27}{31}$
$\frac{6}{23}$	$69\frac{11}{23}$	$64\frac{8}{23}$	$12\frac{19}{23}$	$8\frac{16}{23}$	$8\frac{28}{69}$	$8\frac{26}{253}$	$7\frac{67}{69}$
$\frac{6}{19}$	$58\frac{11}{19}$	$54\frac{12}{19}$	$10\frac{13}{19}$	$7\frac{7}{19}$	$7\frac{14}{57}$	$7\frac{7}{209}$	$6\frac{41}{57}$
$\frac{2}{19}$	$42\frac{2}{19}$	$38\frac{18}{19}$	$7\frac{12}{19}$	$5\frac{5}{19}$	$5\frac{10}{57}$	$5\frac{5}{209}$	$4\frac{42}{57}$

in
d

d
g
lo
ln
to

a
g
S

c
n
p

h
fi
p
g

g
A
a

t

XIII. Sphæræ ejusdem generis inter se sunt in gravitate, ut diametrorum cubi in magnitudine.

XIV. Tabellæ binæ pro comparandis inter se duodecim corporum generibus gravitate & magnitudine; in superiore tabella. 1 ponitur pro levioris gravitate: at pro magnitudine gravioris. In inferiore 100 ponitur pro gravioris gravitate: at pro magnitudine levioris.

Exempli gratia corpus plumbeum ad corpus aureum ejusdem magnitudinis rationem habet in gravitate ut $1^{21.18}_{ad}$ $1\frac{15}{23}$: vel ut 60 $\frac{10}{19}$ ad 100. Scil. directè $\frac{38}{19}$. 23 :: $\frac{100}{50}$. $\frac{1150}{19}$.

Item corpus plumbeum ad corpus aureum ejusdem gravitatis rationem habet in magnitudine, ut $1\frac{15}{23}$ $_{ad}\frac{38}{1}$ ^{23} vel ut 100 ad 60 $\frac{10}{19}$ Scil. reciproce.

Apud nostros Aurifices. 1$^{lb.}$ est 5760 granorum hordei = decem unciis Ghetaldi si grana eadem sint: at si grana exterorum fuerint tritici, vel piperis, ejus libra, est 6912. gran: & 5184. gran. Angl.

Pes Romanus antiquus ad pedem usitatum Anglicanum est ut 11 18 ad 12 vel ut 9 183 ad 10. At vero ad Romanum palmum modernum ut 4 ad 3. Libram dividit Ghetaldus in uncias 12,
(576) unciam in scuprula 24: scrupulum in grana 24.

XV Ad inveniendum gravitatem sphæræ datam habentis diametrum: Cylindrum ex stanno

altitu-

altitudine æqualem diametro basis fieri curavit Ghetaldus exactissime tornatum, cujus altitudo erat sextans pedis Romani; gravitas vero inventa est duarum librarum cum uncia & octo scrupulis, hoc est granorum 14592: hujus bes est granorum $\frac{8x1116}{9728}$ pro gravitate sphæræ ejusdem diametri. Itaque.

XVI. Si quæratur gravitas sphæræ stanneæ habentis diametrum æqualem quadranti unciæ: qui quadrans unciæ est $\frac{1}{8}$ pars duarum unciarum: dic: ut cubus ex 8 ad cubum ex 1, hoc est ut 512 ad 1, sic 9728 ad. 19 quare per XIII sphæræ cujus diameter est quadrans unciæ gravitas erit 19 granorum.

Cubus ex uncia Romana est gr. 2322\3887324. & sphæra ex unciali diametro est gr. 1216. 64) 1216 (19.

Ex hac ratione 1 ad 19 inventa, omnium sphærarum è stanno conflatarum quæcunque ipsarum fuerit diameter, gravitas facillime patebit per XIII sicut ante. 1. 19:: (c:4) 64. 1216:: (c:8) 512. 9728 gr: gravitas sphæræ stanneæ diametri $\frac{8}{4}$ unciæ.

XVII. Si quæratur gravitas sphæræ plumbeæ habentis diametrum æqualem quadranti unciæ: quia plumbum est ad stannum in gravitate ut $1\frac{41}{74}$ ad 1 per tabellam superiorem hoc est ut 115 ad 74: Et gravitas sphæræ stanneæ cujus diameter $\frac{1}{4}$ unciæ est 19: Dic, ut 74 ad 115, sic 19 ad $29\frac{39}{74}$: tanta erit gravitas quæsita.

XVIII. Si

XVIII. Si quæratur diameter sphæræ stanneæ gravitatem habentis ℔ 1. sive 6912 grana nempe 12 + 24 + 24): Quia sphæra stannea cujus diameter est 1 uncia pendit grana 1216 (19 + 64) per XVI. Dic per XIII ut 1216^{gr} ad 1^{u}, sic 6912^{gr} ad $5\frac{11}{19}{}^{u}$; qui cubus est diametri sphæræ stanneæ quæsitæ: cujus radix cubica sic eruetur ad partes usque centesimas. multipliciter $5\frac{11}{19}$ per 1000000 factus erit $5684210\frac{10}{19}$, hujus neglecta fractione latus cubicum est 178 tanta erit diameter sphæræ stanneæ pendentis 1 libram. $5\frac{11}{19}$ est $\frac{106}{19}$: 19.) 106000000 (5684210.

XIX. Si quæratur diameter sphæræ ferreæ gravitatem habentis ℔ 1 sive 6912 grana. Primo per XVII inveniatur gravitas sphæræ ferreæ diametri 1 unciæ, quæ est granorum $1314\frac{22}{37}$: dic per XIII ut $1314\frac{22}{37}{}^{g}$ ad 1^{u}, sic 6912^{g} ad $5\frac{49}{190}{}^{u}$; qui cubus est diametri sphæræ ferreæ quæsitæ; cujus radix cubica 174 est ipsa diameter.

XX. Si trium corporum æque gravium primum (A) & tertium (D) fuerint diversi generis: secundum autem (B + C) compositum ex primo & tertio: fuerint etiam tres aquæ quantitates tribus illis corporibus æquales (P, Q, O + L) (sitque E gravitas portionis B, & K gravitas portionis C: ita ut E + K sit communis gravitas trium corporum primorum æquegravium: sitque G gravitas aquei corporis P, & H gravitas corporis aquei Q; & F gravitas portionis aquæ O,

&

& V gravitas portionis L) erit primo: ut differentia gravitatum primæ & tertiæ quantitatis aquæ, ad differentiam primæ & secundæ quantitatis aquæ, sic gravitas corporum communis ad gravitatem portionis corporis secundi, quæ est ejusdem generis cum corpore tertio: (scil. H — G. F + V — G : : E + K. K.)

Eritque secundo ut differentia gravitatum primæ & tertiæ quantitatis aquæ, ad differentiam secundæ & tertiæ quantitatis aquæ; sic gravitas corporum communis ad gravitatem reliquæ portionis corporis secundi: (scil. H — G. H — F — V : : E + K. E.)

Corpora

Nam $\left\{ \begin{matrix} D. C : : Q. L \\ A. B : : P. O \end{matrix} \right\}$

Ideoque per 1

$\left\{ \begin{matrix} E + K. K : : H. V : : G. G - F : : H - G. V - G + F \\ E + K. E : : G. F : : H. H - V : : H - G. H - V - F \end{matrix} \right.$

XXI. Hinc invenitur portio metalli alteri metallo mista, per ratiocinationem ponderis. Esto corpus aureum argento mistum gravitatis 95 : quanta est portio argenti in ipso?

Intelligantur saltem duo alia corpora unum pure aureum, alterum pure argenteum, eandem cum dato gravitatem habentia: Deinde trium corporum ex aqua, quorum primum magnitudine æquale sit puro aureo, secundum misto, tertium puro argenteo, gravitates investigentur per V^m

&

& I^{m} Eritque primi corporis aquei gravitas 5, ſecundi 6, tertii $9\frac{6}{31}$. Tum denique per XX. fiat ut $9\frac{6}{31}$ - 5, ad 6 - 5; ſic 95, ad $22\frac{17}{26}$; tanta fuit portionis argenti miſti cum auro gravitas: reliquum fuit ex auro puro: Vel dic $9\frac{6}{31}$ - 5. $9\frac{6}{31}$ - 6: : 95. $72\frac{9}{26}$ quæ gravitas eſt auri puri.

XXII. Aurum purum appellatur ab aurificibus aurum 24 partium: auri autem miſti ſive minus puri qualitas exprimitur partibus auri puri quæ ſunt in corpore propoſito, non in magnitudine ſed in gravitate ſumtis, qualibus totum corpus conſtat 24: v: g: ſi in corpore cum viginti partibus auri puri immiſceantur 4 partes metalli alterius, dicitur aurum viginti partium, ſive di 20 caratti. Nec miſcere cum puro auro ſolent aurifices argentum ſolum: ſed quo minus à ſimilitudine auri miſtum diſcedat, argentum & æs æqualis ponderis miſcent una cum auro, edocti ſcilicet ab experientia hunc eſſe miſtionis modum optimum. Quando ergo aurifices volunt producere aurum cujuſcunque qualitatis accipiunt tot partes auri puri æquales, quot partium futurum eſt aurum producendum, & reliquas partes quæ deſunt ad 24 explent argento & ære æquali pondere: & quoniam in liquefactione ex argento & ære aliquid evaneſcet, cum aurum imminutum maneat, ſolent idcirco tanto plus miſcere argenti & æris, quantum perdi poſſe deprehendunt; atque his rite inter ſe permixtis componunt aurum qualitatis aptatæ.

Auri gravitas quæ in aere eſt 19, erit in aqua 18
Argenti gravitas quæ in aere eſt 31, erit in aqua 28
Æris gravitas quæ in aere eſt 9, erit in aqua 8

Item Aqua

ad aurum ut 1 ad 19.
ad argentum ut 3 ad 31.
ad æs eſt ut 1 ad 9.

Et quia 31. 28::9. $8\frac{4}{31}$: Argenti gravitas quæ in aere eſt 9, erit in aqua $8\frac{4}{31}$.

Quare corporis ex argento & ære æqualiter miſti gravitas in aere 18, erit in aqua $16\frac{4}{31}$.

Et corporis ex argento & ære miſti gravitas erit ad aquam ut 18 ad $1\frac{27}{31}$ (9 ad $\frac{29}{31}$)

XXIII. Quibus ſic conſtitutis, invenitur qualitas corporis quomodocunque ex argento & ære æqualiter miſti. Eſto maſſa auri cujus gravitas in aere ſit unciarum 24: Quæritur cujus qualitatis ſit ipſum aurum?

Ponderetur ea maſſa in aqua; & habeat gravitatem unciarum $22\frac{2818}{5301}$: Ergo per 4 & 5 gravitas aquæ magnitudinem habentis æqualem maſſæ erit unciarum $1\frac{2483}{5301}$.

Deinde inveniatur gravitas aquæ magnitudine æqualis maſſæ unciarum 24, ex argento & ære æqualiter miſtæ, ſic: 9.$\frac{29}{31}$ :: 24. $2\frac{46}{93}$.

Atque ita habentur tres gravitates trium aquæ quantitatum, quarum prima eſt unc: $1\frac{5}{19}$. gravitas aquæ magnitudine æqualis auro puro unciarum 24.

Secunda

Secunda eſt unc: $1\frac{2481}{5301}$, gravitas aquæ magnitudine æqualis maſſæ propoſitæ.

Tertia eſt unc: $2\frac{46}{93}$, gravitas aquæ magnitudine æqualis maſſæ tertiæ ex argento &. ære.

Vel in eadem denominatione. Prima eſt $1\frac{1395}{5301}$. Securda $1\frac{2481}{5301}$. Tertia $2\frac{2622}{5301}$.

Differertia primæ & tertiæ eſt $1\frac{1227}{5301}$. Secundæ & Tertiæ $1\frac{139}{5301}$.

Dic igitur per XXI. hujus $1\frac{1227}{5301}$. $1\frac{139}{5301}$ :: 24. 20. vel ſic 6. 5 :: 44. 20.

Quare maſſa auri propoſita eſt 20 partium, vel di 20 caratti: quia continet 20 uncias puri auri, cum quatuor unciis argenti & æris ſimul. Verum ſi numerus unciarum maſſæ propoſitæ alius eſſet quam 24, peracta ut prius operatione, numerus unciarum inventus ad 24^as^ partes per proportionem erit revocandus.

Automata.

4 mobiles		5 mobiles	
	O		O
	o) I (ζ		o) V (α
	ι) E (δ		υ) I (ζ
	ι) A (γ		ι) E (δ
			ι) A (γ
motrix	α) B (β	motrix	α (B (β

I-I. æqualia tempore: vel quæ æquali tempore moventur.

T. revolutiones circa Fusum.

C. tota continuatio motus.

D. numerus crenarum rotæ coronariæ intra unam horam motarum.

Δ. numerus crenarum rotæ coronariæ intra unam revolutionem A motarum.

B. rota horaria, cujus revolutio fit in H. horis, aut partibus temporis.

P. altera rota horaria, cujus revolutio fit in M partibus temporis.

F. altera rota horaria, cujus revolutio fit in N partibus temporis.

I. In omni Automato quædam ex rotis & tympanulis efficiunt, sive excitant motum; alia determinant, sive specificant.

II. Quæ

II. Quæ efficiunt motum, sunt, prima magna rota A. cum Fuso, quæ movet ε tympanulum secundæ rotæ E; quæ deinde movet ι. tympanulum tertiæ rotæ I; quæ tertio movet o tympanulum rotæ coronariæ O; quæ postremo movet libram.

III. Quæ specificant motum sunt, tympanulum α. affixum axi majoris rotæ, movens B rotam Horariam, cujus revolutio fit in H horis, aut partibus temporis; Vel tympanulum ε affixum secundæ rotæ E, movens alteram rotam horariam P cujus revolutio fit in M partibus temporis; vel demum ι affixum axi tertiæ rotæ I, movens F tertiam horariam rotam, cujus revolutio fit, in N partibus temporis; una cum intermediis rotis, & tympanulis prout necessitas postulaverit.

IV. Si numerus rotæ divisus fuerit, per numerum alterius rotæ, illam moventis, aut ab illa motæ; Quotiens indicabit quot revolutiones divisoris æquant unam dividendi; & quota pars dividendi æqualis sit uni revolutioni divisoris: ut si $\frac{A}{\varepsilon} = \gamma$. erit A I-I γE. & $\frac{A}{\gamma}$ I-I E. (i. e.) una revolutio A, & γ revolutiones E æquali tempore fiunt. Et $\frac{1}{\gamma}$ pars A, & una revolutio E æquali tempore moventur. Sic $\frac{E}{\iota} = \delta$. & $\frac{I}{o} = \zeta$.

V. Quare in omni motu, numeri duarum rotarum faciunt rationem, sive fractionem, cujus

numerator

numerator est motrix, in iis quæ efficiunt motum: ut $\frac{A}{\iota} = \gamma$. $\frac{E}{I} = \delta$. $\frac{I}{O} = \zeta$. sed in iis quæ specifiant, denominator. ut. $\frac{B}{\alpha} = \beta$. $\frac{P}{\pi} = \pi$. $\frac{F}{\epsilon} = \phi$ (Nam A l-l α. E l-l ι. I l-l. L.)

VI. A l-l γ E l-l $\gamma\delta$ I l-l $\gamma\delta\zeta$ O. (i.e.) totidem revolutionibus O si accipiatur pro rota coronaria; vel totidem crenis rotæ O si pro numero accipiatur. Quod intelligi debet de reliquis literis A, E, I, & B. P. F. & H. M. N.

VII. H l-l B l-l β A l-l $\beta\gamma$ E l-l $\beta\gamma\delta$ I l-l $\beta\gamma\delta\zeta$ O

M. l-l P l-l π E l-l $\pi\delta$ I l-l $\pi\delta\zeta$ O

N l-l F l-l ϕ I l-l $\phi\zeta$ O

A l-l $\frac{H}{\beta}$ l-l $\frac{B}{\beta}$

E l-l $\frac{H}{\beta\gamma}$ l-l $\frac{M}{\pi}$ l-l $\frac{P}{\pi}$ l-l $\frac{B}{\beta\gamma}$

I l-l $\frac{H}{\beta\gamma\delta}$ l-l $\frac{M}{\pi\delta}$ l-l $\frac{P}{\pi\delta}$ l-l $\frac{N}{\phi}$ l-l $\frac{F}{\phi}$

VIII. $\gamma\delta\zeta O = \Delta$. (i. e.) numero crenarum rotæ coronariæ intra unam revolutionem A motarum (per. 6.) Quare A l-l Δ.

IX. A l-l $\frac{\gamma}{\pi}$ P. & P l-l $\frac{\pi}{\gamma}$ A. Nam (per 6.7) A l-l $\frac{}{\gamma}$ E l-l $\frac{P}{\pi}$. Ergo. Item A l-l $\frac{\gamma}{\pi}$ M. Nota quod $\frac{\gamma P}{\pi}$ & $\frac{\gamma}{\pi}$ P. idem est.

X. A

X. $A \;|\!-\!|\; \frac{\gamma\delta}{\phi} F$. & $F \;|\!-\!|\; \frac{\phi}{\gamma\delta} A$. Nam (per 6. 7.) $\frac{A}{\gamma\delta} \;|\!-\!|\; I \;|\!-\!|\; \frac{F}{\phi}$. Ergo. Item $A \;|\!-\!|\; \frac{\gamma\delta}{\phi} N$.

XI. Quare $A \;|\!-\!|\; \Delta \;|\!-\!|\; \frac{H}{\beta} \;|\!-\!|\; \frac{B}{\beta} \;|\!-\!|\; \gamma E \;|\!-\!|\; \gamma\delta I \;|\!-\!|\; \frac{\gamma}{\pi} P \;|\!-\!|\; \frac{\gamma}{\pi} M \;|\!-\!|\; \frac{\gamma\delta}{\phi} F. \;|\!-\!|\; \frac{\gamma\delta}{\phi} N \;|\!-\!|\; \frac{H}{\beta} D$.

XII. $\frac{\beta\gamma\delta\zeta O}{H} = \frac{\beta\Delta}{H} = D$ (i. e.) numero crenarum rotæ coronariæ intra unam horam motarum. Nam (per 7)
$H^{ho}.\ \beta\gamma\delta\zeta O :: 1^{ho}.\ \frac{\beta\gamma\delta\zeta O}{H}$.

XIII. $\frac{\pi\Delta}{\gamma M} = \Omega$. (*i. e.*) numero crenarum O motarum intra unam partem M. Nam (per 7. 11) $\frac{M}{\pi} \;|\!-\!|\; E \;|\!-\!|\; \frac{\Delta}{\gamma}$. Quare $M \;|\!-\!|\; \frac{\pi\Delta}{\gamma}$. adeoque $\frac{1}{M} \;|\!-\!|\; \frac{\pi\Delta}{\gamma M} \;|\!-\!|\; \frac{\pi}{\gamma M} A$. Confect: $M.\ \frac{\pi}{\gamma} :: \Delta.\ D$. Et $E \;|\!-\!|\; \frac{1}{\gamma} \Delta$.

XIV. $\beta M.\ \frac{\pi}{\gamma} H :: \Delta.\ \Omega$. Nam

$$\left.\begin{array}{l} \beta.\ H :: D.\ \Delta \\ M.\ \frac{\pi}{\gamma} :: \Delta.\ \Omega. \end{array}\right\} \beta\gamma M\Omega = \pi H D.$$

XV. $\frac{\phi\Delta}{\gamma\delta N} \;|\!-\!|\; S$: (i. e. numero crenarum O intra unam partem N motarum. Nam (per 6,

7,

7, 11.) $\frac{N}{\phi} \mathrel{|\!-\!|} I \mathrel{|\!-\!|} \frac{\Delta}{\gamma\delta}$. Quare $N \mathrel{|\!-\!|} \frac{\phi\Delta}{\gamma\delta}$: & $\frac{1}{N} \mathrel{|\!-\!|} \frac{\phi\Delta}{\gamma\delta N} \mathrel{|\!-\!|} \frac{\phi}{\gamma\delta N} A$.

Confect. $N.\ \frac{\phi}{\gamma\delta} :: \Delta.\ S$

Confect. $I. \mathrel{|\!-\!|} \frac{1}{\gamma\delta}\Delta$

XVI. $\beta N.\ \frac{\phi}{\gamma\delta} H :: D.\ S.$ Nam

$$\left.\begin{array}{l} \beta.\ H :: D.\ \Delta \\ N.\ \frac{\phi}{\gamma\delta} :: \Delta.\ D \end{array}\right\} \beta\gamma\delta NS = \phi HD$$

XVII. Ex præcedentibus propos: sequitur.

$$\frac{1}{H} \mathrel{|\!-\!|} \frac{\beta}{H}A \mathrel{|\!-\!|} \frac{\beta\gamma}{H}E \mathrel{|\!-\!|} \frac{\beta\gamma\delta}{H}I \mathrel{|\!-\!|} \frac{\beta\gamma\delta\zeta}{H}O \mathrel{|\!-\!|} D$$

$$\frac{1}{M} \mathrel{|\!-\!|} \frac{\pi}{M}E \mathrel{|\!-\!|} \frac{\pi}{\gamma M}A \mathrel{|\!-\!|} \frac{\pi\delta}{M}I \mathrel{|\!-\!|} \frac{\pi\delta\zeta}{M}O \mathrel{|\!-\!|} \Omega$$

$$\frac{1}{N} \mathrel{|\!-\!|} \frac{\phi}{N}I \mathrel{|\!-\!|} \frac{\phi\zeta}{N}O \mathrel{|\!-\!|} \frac{\phi}{\delta N}E \mathrel{|\!-\!|} \frac{\phi}{\gamma\delta N}A \mathrel{|\!-\!|} S$$

XVIII. $H.\ \beta = \frac{B}{\alpha} :: \Delta.\ D :: C.\ T.$ Nam si in H horis sint β revolutiones A: vel $\beta\Delta$ crenæ motæ (per 12.) in una hora sunt $\frac{\beta}{H}$ revolutiones A; vel. $\frac{\beta\Delta}{H}$ crenæ motæ. uti tum etiam in C horis, (i. e.) continuatione motus Automati, fiunt T revolutiones A. vel revolutiones circa Fusum.

XIX. Quare quo minor β. eo diuturnior erit C æquali T.

XX. Motus B. P :: $\beta.\ \frac{\pi}{\gamma}$

Et

Et motus. B. F : : $\frac{\beta}{\pi}$. $\frac{\Phi}{\gamma\delta}$

Et motus P. F : : $\frac{\pi}{\gamma}$. $\frac{\Phi}{\gamma\delta}$.

Nam B |-| $\beta\alpha$. & F |-| $\frac{\Phi}{\gamma\delta}$ A. & P |-| $\frac{\pi}{\gamma}$ A.

(per. 7. 9. 10.)

De inventione Numerorum, qui rotis, & tympanulis aptentur.

XXI. Quælibet duæ fractiones, quarum termini sunt proportionales, eundem motum efficiunt. ut $\frac{2}{1}$ vel $\frac{16}{4}$ vel $\frac{45}{5}$. Inferior est numerus tympanuli, superior Rotæ.

XXII. Idem motus perfici potest, una rota, & uno tympanulo; vel multis rotis, & totidem tympanulis; modo Factus ex omnibus rotis, sit ad factum ex omnibus tympanulis, ut ista una rota ad illud unum tympanulum; ut in hoc exemplo.

$$\frac{1440}{28} = \frac{16}{28} + \frac{8}{1} + \frac{5}{1}. \text{ Vel } \frac{16}{4} + \frac{8}{7} + \frac{50}{1}$$

Nec refert quo ordine rotæ, & tympanula disponuntur : aut quod tympanulum, cui rotæ subjacet.

XXIII. Et hi factores inventi, multipliciter variari possunt per hanc regulam.

Regula.

Si duo factores dati dividantur, per alios duos numeros eos metientes : & Quotientes multiplicentur per alternos divisores : Factus è dù-

obus numeris ultimo inventis, æqualis erit facto è duobus factoribus datis. Sic pro 36 + 8 datis, prodibunt 32 + 9, ut in apposito exemplo.

9	8
36	+ 8
4	1
32	+ 9

Nam. 36. 32 : : 9. 8 (1 + 9. 1 + 8 : : 4 + 9. 4 + 8.)

XXIV. Si idonei proportionales numeri inveniri non possunt, per ullam ex tribus hisce ultimis regulis; quæres aliquam aliam rationem quam proximam, hoc modo: Dic, ut unus è numeris datis ad alterum, sic 360 ad quartum: quem divide per 5. 6. 8. 9. aut per aliquem eorum qui dabit Quotientem, quam proximum integro: & per eundem etiam divide 360, Ut si duo numeri dati sint $\frac{147}{170}$: qui majores sunt quam commode possint rotis incidi, nec ad minores reduci possunt, quia eorum maxima communis mensura est 1.

Dic igitur $\left\{\begin{matrix} 170.\ 147 :: 360.\ 311 + \\ 147.\ 170 :: 360.\ 416 + \end{matrix}\right.$

$6)\ \frac{311}{360}.\ \frac{52}{60}.\quad 8)\ \frac{311}{360}.\ \frac{39}{45}.\quad 8)\ \frac{360}{416}.\ \frac{45}{52}.$

Quare pro duobus numeris 147. & 170 datis: accipi possunt 52 & 60. vel 39 & 45. vel. 45 & 52. &c.

XXV. Si duæ rotæ alicujus motus extra tangant, movent viis contrariis: si intra, eadem.

XXVI. In

XXVI. In minoribus Automatis. D ad minimum ſit 8000. ſed in majoribus poſſit eſſe 4000: nam in minoribus velocius motuum ſyſtema magis commendatur.

XXVII: Aptare numeros automato velocioris ſyſtematis; cujus D ſit 10000. T. 12. C. 16. & O. 17.

Dic (per 18. $^{T}12\ 16^{C}$ :: 10000. 13333.

Deinde 17^{O}_{II}) 13333 (784. pro $\gamma\ \delta\ \zeta$ (per 8)

Quære igitur tres numeros, qui in ſe invicem ducti faciant 784 quam proxime. Sint 11. 9.8. quorum factus eſt 792. quem duc in 17. Factus 13464 erit Δ (per. 8.) tum dic.

$16^{C}.\ 12^{T}::13464^{\Delta}.\ 10098^{D}.$

Dic etiam

$16^{C}.\ 12^{T}::12^{H}.\ \frac{9}{1}.\ \frac{B}{\alpha}$

4) 36 B (β

---

5) 55 (11. γ
5) 45 (9. δ
5) 40 (8. ζ
O 17

Δ 13464
D 10098
C 16. T 12.

Tum per tres Quotientes aſſumtos 11. 9. 8. invenias tres rotas, A 55. E 45. I. 40, & tria tympanula. ꞉ 5. 1. 5. 05. ut in appoſito exemplo.

XXVIII. Invenire quanta ſit continuatio motus cujus D ſit tardius. viz. 8000.

Dic. $13464^{\Delta}.\ 8000^{D}::12^{H}.\ \frac{96000}{13464}\ \frac{B}{\alpha}\ \frac{36}{5}$

Tum dic $\frac{36}{5}.\ \frac{B}{\alpha}.\ 12\ ::\ 12^{T}.\ 20^{C}$

XXIX. Aptare numeros Automato, cujus D ſit 5000. T 12. C 170. & O 17.

Operatio eſt, ut in 27 Dic 12^{T}. 170^{C} : : 5000. 70833 Tum 17) 70833 (4167 pro γδζθ: Quia hic quatuor numeri neceſſarii ſunt, viz 8. 8, 8, $6\frac{3}{5}$ qui faciunt 4224. qui ductus in 17 facit 71808 Δ.

Tum dic 170^{C}. 12^{T} : : 71808Δ. 5069^{D} &. 17^{C}. 12^{T} : : 12^{H}. $\frac{144}{17}$ B. α.

α, 53) 45 B (β

ε. 6) 48 (8. γ
ι. 6) 48 (8. δ
υ. 5) 40 (8. ζ
ο. 5) 33 ($6\frac{3}{5}$ θ

O 17

Δ 71808
D 5068
C. 169⌊6. T 12

Hoc automatum habet quatuor rotas præter Coronariam: quæ una cum tympanulis inveniuntur ut in 27. & in appoſito exemplo.

XXX. Hoc automato dato cum quatuor rotis præter coronariam: invenire quanta erit continuatio motus, cum ſatis veloci ſyſtemate, cujus D. erit 9000: Dic 60480Δ. 9000^{D} : : 12^{T}. $\frac{21}{14}$ $\frac{B}{\alpha}$ (β.

Dic iterum. $\frac{21}{14}$ $\frac{B}{\alpha}$. 12^{H} : : 12^{T}. $80\frac{16}{25}$ C.

6) 48 (8
5) 45 (9
5) 40 (8
5) 35 (7
O 15
Δ 60480
T 12

Et ſi requiratur utrum motus continuari poſſit ad 150 horas ſatis idoneo ſyſtemate.

Dic.

Dic. $150^{C}. 12^{T} :: 12^{H}. \frac{144}{150}{}^{B}_{\alpha}. \frac{24}{25}$

dic iterum

$150^{C}. 12^{T} :: 60480^{\Delta}. 4836^{D}.$

Quod ſyſtema ſatis erit idoneum, ſi Automatum fuerit ſatis magnum: ſed nimis tardum erit, ſi Automatum fuerit exiguum.

Pars

Pars Secunda.

XXXI. Numerus cujusque motus, eſt numerus revolutionum rotæ A, vel tympanuli α, quæ fiunt intra unam revolutionem iſtius motus. Ut ſi una revolutio motus peragatur 12 horis, & eodem tempore rota A faciat $\frac{B}{\alpha}$. (i. e.) β revolutiones: numerus motus quò hora indicatur, erit $\frac{\beta}{1}$ vel $\frac{B}{\alpha}$. Quare axi rotæ A, affigatur tympanulum α; circumducens rotam B: cujus centro index horarius affigendus eſt.

XXXII. Quoniam maximus numerus dierum unius menſis eſt. 31: & in uno die 2 B |·| 2 β revolutiones A fiunt, (per. 7) numerus motus quo dies menſis indicatur, erit 62 revolutiones A, (i. e.) $\frac{62}{1}$ B vel $\frac{62}{1} + \frac{B}{\alpha}$ A: & in rotis $\frac{62}{4} + \frac{4}{1}$ B: Nam $\frac{B}{\alpha}$ datur in automato. Quare rotæ B concentricum affigatur tympanulum 10, circumducens rotam 40. quæ tympanulo 4 circumducet annulum 62: cujus ſuperius planum dividatut in 31 dies.

XXXIII. Quoniam numerus dierum revolutionis Lunæ, eſt. 29 $\frac{1}{2}$ vel $\frac{59}{2}$, & in uno die 2 B |·| 2 β

revo-

revolutiones A fiunt : Numerus motus, quo ætas Lunæ indicatur, erit 59 revolutiones B, vel 59 β revolutiones A; (i. e.) $\frac{59}{1}$ B, vel $\frac{59}{1} + \frac{B}{\alpha}$ A; & in rotis $\frac{59}{4} + \frac{4}{1}$ B: Nam $\frac{B}{\alpha}$ datur in Automato. Quare rotæ B concentricum affigatur, tympanulum 10. circumducens rotam 40; quæ tympanulo 4, circumducet annulum 59, cujus superius planum dividitur in dies $29\frac{1}{2}$.

XXXIV. Numerus dierum in Anno eſt 365, & in uno die fiunt 2 B |-| 2 β revolutiones A: quare Numerus motus quo dies anni, vel gradus ſolis in Eccliptica &c. indicatur, erit 730 revolutiones B, vel 730 β A $+ \frac{10}{4}$ B vel $\frac{73}{1} + \frac{10}{1} + \frac{B}{\alpha}$ A: Et in ratis $\frac{73}{4} + \frac{10}{1} + \frac{4}{1} + \frac{B}{\alpha}$: Nam $\frac{B}{\alpha}$ in Automato datur. Quare rotæ B concentricum affigatur tympanulum, 10, circumducens rotam 40: quæ tympanulo 5 circumducit rotam 50; quæ demum tympanulo 4. circumducit annulum 37 3: cujus ſuperius planum dividitur in 12 Menſes, vel Signa &c.

XXXV. Vel in plano horario, ex utraque parte annuli 73, nota dies anni, & gradus Eccliptica, appoſito Verno Æquinoctio ad horam 12: Et in ſuperiore parte annuli 73. ponantur horæ occaſus Solis ex hac tabulâ accommodata anno 1634.

Ad VII

VI	Mar. 10	Sep. 13	Sep. 13	Mar. 10	VI
$6\frac{1}{4}$	Mar. 17	Sep. 6	Sep. 20	Mar. 3	$5\frac{1}{4}$
$6\frac{1}{2}$	Mar. 24	Aug. 30	Sep. 27	Feb. 24	$5\frac{1}{2}$
$6\frac{3}{4}$	Apr. 1	Aug. 22	Oct. 5	Feb. 17	$5\frac{1}{4}$
VII	Apr. 9	Aug. 14	Oct. 13	Feb. 9	V
$7\frac{1}{4}$	Apr. 18	Aug. 5	Oct. 21	Feb. 1	$4\frac{1}{4}$
$7\frac{1}{2}$	Apr. 28	Jul. 26	Oct. 30	Jan. 24	$4\frac{1}{2}$
$7\frac{3}{4}$	Mar. 8	Jul. 16	Nov. 9	Jan. 14	$4\frac{1}{4}$
VIII	Mar. 20	Jul. 5	Nov. 20	Jan. 3	IIII
$8\frac{1}{8}$	Mar. 29	Jun. 26	Nov. 28	Dec. 26	$3\frac{7}{8}$
	VIII	13	III	47	

Ad VI adverſus Mar: 10, pone clavulum in annulo 73 ad indicandum diem Anni, & gradum Solis, hora occaſus Solis, quolibet die conſpicietur adverſus 10 Mar.

XXXVI. Exhibere figuram, vel Phaſin Lunæ quo libet die, In plano horario fiat foramen rotundum, ſub quo movebit planum annuli 59, notatum arcuatis lineis albo nigroque interſtinctis, uti à Gemma Friſio aliiſque oſtenditur.

XXXVII.

XXXVII. Hora maximi incrementi maris, quovis portu, hoc modo indicabitur. Quære quâ plaga Luna facit maximam intumescentiam maris portu dato, (ut ad Londini pontem. N E. vel S W.) Plagam inventam converte in horas; cuilibet plagæ à N vel S. ultimo appulsis, 45 minutis ascriptis: adversus horam duodecimam pone horam inuentam: à qua incipiens divides annulum in 24 horas, versus eas partes, quibus lunæ annulus movetur, quo pacto dies novilunii, cum clavulo, quovis die horam maximi incrementi maris portu dato indicabit,

Tabula quâ plagæ compassi in horas convertantur. à N & S.

S	12	N	S	12	N
SbW	12.45	NbE	SbE	11. 15	NbW
SSW	1. 30	NNE	SSE	10. 30	NNW
SWbS	2. 15	NEbN	SEbS	9. 45	NWbN
SW	3	NE	SE	9	NW
SWbW	3. 45	NEbE	SEbE	8. 15	NWbW
WSW	4. 30	ENE	ESE	7. 30	WNW
WbS	5. 15	EbN	EbS	6. 45	WbN
W	6	E	E	6	W

XXXVIII. Si vis indicem, Motum ſimul, & diei horam indicare; Fiet annulo movente ſuper planum Horarium ſub indice, cujus ſuperior facies notatur diuiſionibus iſtius Motus; Numeri tympanulorum, & rotarum, Ex. gr. in Motu Lunæ, (nam eadem eſt ratio in omnibus) ſic invenientur. Quoniam una revolutione indicis Luna conficit $\frac{1}{59}$ partem; Lunæ rota ita componi debet, ut in qualibet revolutione Indicis vel β revolutionibus A, diſcedat ab Indice $\frac{1}{59}$ partem β: Quare pro numero motus accipe $\beta + \frac{\beta}{59}$ (i. e.) $60 + \frac{\beta}{59}$, & motus proportionaliter tardior erit rota B, vel Indice. Vel accipe $\beta - \frac{\beta}{59}$ (i. e.) $58 + \frac{\beta}{59}$ & erit velocior. Tympanulum 59 affigendum eſt concentricum rotæ B, circumducens rotam 60, vel 58: cujus ſuperius planum dividendum eſt in dies $29\frac{1}{2}$.

XXXIX. Invenire rotam, cujus revolutio intra horam facta, indicet minuta. Primo quia (per 17) in una hora $\frac{\beta}{H}$ partes A moventur: ſi tympanulum H affigatur axi A, circumducet rotam β in una hora.

Vel ſecundo, quia B circumvolvitur in H horis: in una hora movebit $\frac{1}{H}$ B, (i. e.) $\frac{4}{4H}$ B. Quare tympanulum 4 H affixum concentricum B circumducet rotam 4 in una hora,

Vel tertio, quia (per 7) E facit $\beta\gamma$ revolutiones

in H horis: in una hora fient $\frac{\beta\gamma}{H}$ (i. e.) $\frac{\gamma}{H} + \frac{B}{\alpha}$ revolutiones E. Quare si tympanulum H affixum axi E circumducat rotam B: idem tympanulo α circumducet rotam γ in una hora.

Vel quarto, quia P circumvolvitur in $\frac{\pi}{\gamma}$ A (per 9) & $\frac{\beta}{H}$ A moventur in una hora (per 17) dic $\frac{\pi}{\gamma}.\frac{\beta}{H}::P.\ \frac{\gamma\beta}{\pi H}$ P |-| $\frac{1}{H}$. Quare tympanulum H affixum concentricum rotæ P, circumducens rotam β: quæ tympanulo π circumagens rotam γ in una horâ: indicabit minuta, vel quamvis partem horæ.

XL. Invenire rotam, cujus revolutio in uno minuto facta, indicabit minuta secunda. Quia prius demonstratum est $\frac{\beta}{H}$ partes A moveri in una horâ, ideo in uno minuto (i. e.) $\frac{1}{60}$ horæ, $\frac{\beta}{60H}$ moventur: (i. e.) $\frac{\beta}{H} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$. Quare si tympanulum H affixum axi A circumducat rotam β. quæ tympanulo 40 circumducat rotam 4, eadem tympanulo 30 circumaget rotam 5 in uno horæ minuto.

Deinde, quia $\frac{\beta\gamma}{H}$ vel $\frac{B\gamma}{\alpha H\pi}$ super axe E, dat rotam circumvolventem in una horâ; ideo $\frac{\beta\gamma}{60H}$, vel $\frac{\beta\gamma}{\alpha H} + \frac{1}{60}$ dabit rotam circumvolventem in uno minuto.

Vel tertio, quia $\frac{\beta\gamma}{H\pi}$, vel $\frac{B\gamma}{\alpha H\pi}$ super rota P dat rotam circumvolventem in una horâ; ideo $\frac{\beta\gamma}{H\pi} + \frac{1}{60}$ vel $\frac{B\gamma}{\alpha H\pi} + \frac{1}{60}$ dabit rotam circumvolventem in uno minuto.

XLI. $M. \frac{\pi}{\gamma} :: K. \frac{\pi K}{\gamma M} = T\tau$; (i. e.) revolutiones A, vel Fusi, pro K continuatione in partibus M. Nam (per. 11.)

$$\frac{\gamma M}{\pi}. A :: K. \frac{\pi K}{\gamma M} A.$$

XLII. $N. \frac{\Phi}{\gamma\delta} :: R. \frac{\Phi R}{\gamma\delta N}$ |-| $T\bar{\tau}$. (i. e.) revolutiones A vel Fusi. pro R. continuatione in partibus N.

Nam (per 11) $\frac{\gamma\delta N}{\Phi}. A :: R \frac{\Phi R}{\gamma\delta N} A$

XLIII. $\frac{\pi}{\gamma\delta}. M :: T\tau. \frac{\gamma M\bar{\tau}}{\pi} = K$. i. e. continuatio in partibus M

XLIV. $\frac{\Phi^{1}}{\gamma\delta}. N :: T\bar{\tau}. \frac{\gamma\delta N T\bar{\tau}}{\Phi} = R$. i. e. continuatio in partibus N.

XLV. In hisce quatuor ultimis prop: si Index horarius affigatur centro P, sed maxime F, systema motuum erit admodum tardum: quia in M partibus temporis (i. e.) una revolutione F. tantum $\frac{\Phi}{\gamma\delta}$ partes A moventur (per 10)

Adeo

Adeo ut prima rota, A, tanto velocior esse debet, quam cum Indice centro B affixo, quanto β major $\frac{\pi}{\gamma}$ vel $\frac{\phi}{\gamma\delta}$. & tum paucæ revolutiones circa Fusum continuationem valde diuturnam facient: quod quo commodo fiat, judicio artificis expendendum permittitur.

XLVI. Sed centro P, vel F, alium Indicem affigendo, velocior motus perficiatur. Quandoquidem (per 9, & 10.) ratio motus B, ad motum P, vel F datur: quæ cognita cuilibet motui proposito, applicari poteſt, ad inveniendа idonea tympanula cum rotis.

XLVII. Quia (per 7) $H \;|\text{-}|\; {}^{\beta}A \;|\text{-}|\; {}^{\beta\gamma}E$ vel. $\frac{B}{\alpha}A = \frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma}{1}$ vel $\frac{B}{\alpha} + \frac{\eta\gamma}{\eta}E$: tam indicatur hora tympanulo η affixo axi rotæ E, circumducenti rotam $\eta\gamma$: quæ tympanulo α circumagat rotam B: quam tympanulo α circumducenti rotam: & eodem ſyſtemate.

XLVIII. Deinde quia (per 20.) Mot: P. B:: $\frac{\pi}{\gamma}.\beta$:: P. $\frac{\beta\gamma}{\pi}$ B; vel $\frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma}{\pi}$ P: tam indicatur hora rota π, affixa concentrica rotæ P, circumducenti, rotam $\beta\gamma$: vel &c. quam tympanulo α circumducenti rotam B: & eodem ſyſtemate.

XLIX. Quia (per 7) $H \;|\text{-}|\; {}^{\beta}A \;|\text{-}|\; {}^{\beta\gamma\delta}I$: vel $\frac{B}{\alpha}A \;|\text{-}|\; \frac{B}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma}{1}$: vel $\frac{B}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma\delta}{\epsilon\iota}I$: tam indicatur hora tympanulo $\epsilon\iota$ affixo axi rotæ I, circumducenti

centi rotam $\alpha\gamma^{\delta}$: quæ tympanulo α circumagit rotam horariam B : quam tympanulo α &c.

L. Deinde quia (per 20.) Mot : F. B : : $\frac{\phi}{\gamma\delta}$: β : : F. $\frac{\beta\gamma\delta}{\phi}$ F : vel $\frac{B}{\alpha}$ + $\frac{\gamma\delta}{\phi}$ F. tam indicatur hora tympanulo ϕ affixo concentrico rotæ F, circumducenti rotam γ^{δ} : vel &c. quam tympanulo α circumducente rotam B : & eodem systemate.

F I N I S.

QUÆSTIONES

Libri I.

Diophanti Alexandrini.

I. DATIS Z & X quærere ipsos numeros.

$\frac{Z+X}{2} = A$. $\frac{Z-X}{2} = E$.

II. Datis Z & Ratione R ad S quærere &c.

R. S : : A. $\frac{SA}{R}$. = E quare $\frac{RA+SA}{R} = Z$ & $\frac{ZR}{R+S} = A$

III. Datis Z & Ratione R ad S, qua & insuper magnitudine B major superat minorem quærere, &c.

R. S : : A -- B. $\frac{SA-BS}{R}$. minor; quare = Z -- A

Et R + S in A = ZR + BS. vel $\frac{ZR+BS}{R+S} = A$

IV. Datis X & Ratione Rad S invenire &c.

R. S : : A. $\frac{SA}{R}$ quare $\frac{RA-SA}{R} = X$ & $\frac{XR}{R-S} = A$.

V. Datis Z, & B aggregato $\frac{1}{3}$^a majoris & $\frac{1}{2}$^a minoris.

Esto major A, minor Z -- A &c.

Vel esto $\frac{1}{3}$^a majoris A. $\frac{1}{2}$^a minoris Z -- A, &c.

VI. Da-

VI. Datis Z, & B excessu $\frac{1}{2}^{a}$ majoris supra $\frac{1}{3}^{am}$ minoris.

Esto major A, minor Z -- A &c.

Vel esto $\frac{1}{2}$ majoris A, $\frac{1}{3}$ minoris Z -- A &c.

$\frac{1}{2} A -- \frac{1}{3} Z + A = B$ vel $A -- \frac{2}{3} Z + \frac{2}{3} A = 2B$

Vel $3A -- 2Z + 2A = 6B$. quare $\frac{6B+2Z}{5} = A$.

VII. Quis numerus est a quo si tollatur B & C, reliquus major erit duplus minoris.

Esto numerus quæsitus A. & B < C.

Quare $A -- C. A -- B :: 2. 1$

Ergo $A -- C = 2A -- 2B$

Ergo $2B -- C = (2A -- A =) A$.

VIII. Quis numerus est cui si addantur B & C aggregatus major, erit duplus minoris.

Esto numerus quæsitus A & B < C &c.

erit $2C + B = A$.

IX. Quis numerus est quo sublato e B & C, reliquus major, duplus sit minoris.

Esto numerus quæsitus A & B < C &c.

Quare $B -- A. C -- A :: 2. 1$

Ergo. $B -- A = 2C -- 2A$

Ergo. $2C -- B = (2A -- A =) A$.

X. Quis numerus est qui si tollatur e B & cui si addatur C, major sit duplus minoris.

Esto numerus quæsitus A & B < C &c.

Quare. $B -- A : A + C :: 2. 1$

Ergo. $2C -- B = A$.

XI. Quis numerus est cui si addatur B & ex quo si tollatur C, major erit triplus minoris.

Esto

Esto numerus quaesitus A & B $<$ C &c.
$A + P . A - - C :: 3 . 1.$ quare $A + B = 3A - - 3C.$
Et $\frac{B + 3C}{2} = A$

XII. Dividere Z in $A + E$, & in $I + O$ sic ut $A = 2O$. & $I = 3E$. Esto major A. minor $Z - A$ erunt duo reliqui $\frac{1}{2} A$, & $3Z - - 3A$ Invenitur $A = \frac{4}{5} Z$.

PRAXIS.

$\frac{1}{2} A + 3Z - 3A = Z$
Vel $A + 6Z - - 6A = 2Z$
Vel $4Z = 5A$. quare $5 . 4 :: Z . A$ Ergo
$\frac{4}{5} Z = A$.

XIII. Dividere Z in $A + E$, & in $I + O$ & in $V + Y$ sic ut $A = 3O$, & $I = 2Y$, & $V = 4E$.
Esto major A minor $Z - - A : 4Z - - 4A = V$
$\frac{1}{3} A = O : Z - - \frac{1}{3} A = I = 2Y : \frac{1}{2} Z - - \frac{1}{6} A = Y$
$\frac{1}{2} Z + \frac{1}{6} A = V$. quare $4Z - - 4A = \frac{1}{2} Z + \frac{1}{6} A$
Vel $\frac{21}{25} Z = A$.

XIV. Invenire duos numeros (A, E) sic ut $AE = 3A + 3E$. Quare $EA - - 3A = 3E$. Vel $AE - - 3E = 3A$. Sumatur igitur pro E vel A numerus aliquis qui major sit quam 3. Sit E. 5. erit
$5A - - 3A$. i. e. $2A = 3E = 15$. & $A = 7\frac{1}{2}$
Ergo $AE = \frac{75}{2} = 3A + 3E = \frac{30}{2} + \frac{45}{2}$.

XV. Invenire duos numeros (A, E) sic ut $2A - - 2B = E + B$, & $3E - - 3C = A + C$ Erit.

$2A - 3B = E$: & $6A - 9B - 3C = A + C$

Quare $A = \frac{4C+9B}{5}$.

XVI. Invenire tres numeros (AEI) sic ut $A + E = B$: $E + I = C$: & $I + A = D$

Erit. $E = B - A$; & $B - A + I = C$,

vel, $I = C + A - B$ & $C - B + 2A = D$,

vel, $A = \frac{B+D-C}{2}$

vel esto summa omnium Z, ut in 17.

XVII. Invenire quatuor numeros (AEIO) sic ut $A + E + I = B$, & $E + I + O = C$, & $I + O + A = D$, & $O + A + E = F$

Erit. $I = B - A - E$: $O = C - B + A$: & $E = C - D + A$: & $C - B + A + A + C - D + A = F$

Vel $A = \frac{B+D+F-2C}{3}$.

Vel esto summa omnium Z. Erit $O = Z - B$ & $A = Z - C$: & $E = Z - D$: & $I = Z - F$.

Quare $Z = 4Z - B - C - D - F$.

Vel $Z = \frac{B+C+D+F}{3}$.

XVIII. Invenire tres numeros (AEI) sic ut $A + E = I + B$: & $E + I = A + C$: & $I + A = E + D$.

Erit $A + E - B = I = E + D - A$

Quare $A = \frac{D+B}{2}$: $E = \frac{B+C}{2}$: $I = \frac{D+C}{2}$

Vel $Z - B = 2I$. $Z - C = 2A$. $Z - D = 2E$.

Ergo dantur omnes tres.

XIX. Eadem quæ 18.

XX. In-

XX. Invenire quatuor numeros (A E I O) ſic ut $A+E+I=O+B$: & $E+I+O=A+C$: & $I+O+A=E+D$: & $O+A+E=I+F$

Eſto ſumma omnium Z. Erit $Z-B=2O$ & $Z-C=2A$ & $Z-D=2E$: & $Z-F=2I$

Quare $4Z-B-C-D-F=2Z$

Vel $Z=\frac{B+C+D+F}{2}$.

XXI. Eadem quæ 20.

XXII. Divide Z in $A+E+I$ ſic ut $A+E=BI$ & $E+I=CA$

Erit $BI+I=Z=CA+A$

Quare $\frac{Z}{B+1}=I$ & $\frac{Z}{C+1}=A$.

XXIII. Invenire tres numeros (A E I) ſic ut $A-\frac{1}{3}I=E$: $E-\frac{1}{5}A=I$. $I-\frac{1}{4}E=B$. Erit $3A-3E=I$, & $5E(-5I)-15A+15E$ hoc eſt $20E-15A=A$, vel $\frac{4}{5}A=E$.

Quare $3A-\frac{12}{5}A$ hoc eſt $\frac{3}{5}A=I$.

Denique $\frac{3}{5}A-\frac{1}{5}A$ hoc eſt $\frac{2}{5}A=B$.

XXIV. Eadem quæ 23. $8E=6B$.

XXV. Invenire tres numeros (A E I) ſic ut $\frac{2}{3}A+\frac{1}{5}E=\frac{4}{5}E+\frac{1}{4}I=\frac{3}{4}I+\frac{1}{3}A$. reſolvantur tres numeri in A juxta conditionem quæſtionis: eruntque A, & $\frac{5}{6}A=E$, & $\frac{2}{3}A=I$. Sumatur igitur pro A numerus quivis qui dividuus eſt per denominatores reliquorum 6 & 3- & fiet propoſitum.

Eſto A 6. erit E 5, & I 4 &c.

PRAXIS.

$\frac{4}{5}E - \frac{1}{3}A = \frac{1}{2}I.$ Et $\frac{2}{3}A - \frac{3}{5}E = \frac{1}{4}I.$

Vel $\frac{8}{5}E - \frac{2}{3}A = I = \frac{8}{3}A - \frac{12}{5}E.$ Vel

$$\overbrace{\frac{8}{5}+\frac{12}{5}}^{20}\Big/\underbrace{1\quad 1}_{5}\ E = \overbrace{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}}^{10}\Big/\underbrace{1\quad 1}_{3}\ A.$$

quare $4E = \frac{10}{3}A$ Vel $12E = 10A.$

$6.5 :: A.E.$ & $\frac{5}{6}A = E.$

Et $\frac{5}{8}I + \frac{5}{12}A = E = \frac{10}{9}A - \frac{5}{12}I.$ Vel

$$3)\ \frac{10}{9} -- \frac{5}{12}\ A = 4)\ \frac{5}{8} + \frac{5}{12}\ I.$$

$$\frac{\overbrace{40 -- 15}^{25}}{\underbrace{3 \quad 4}_{36}} \qquad \frac{\overbrace{15 + 10}^{25}}{\underbrace{2 \quad 3}_{24}}$$

$:: 3.2 :: A.I.\ \frac{2}{3}A = I.$

XXVI. Invenire quatuor numeros (A, E, I, O,) sic ut $\frac{1}{3}A + \frac{3}{4}E = \frac{1}{4}E + \frac{4}{5}I = \frac{1}{5}I + \frac{5}{6}O = \frac{1}{6}O + \frac{2}{3}A$. resolvantur quatuor numeri in A juxta conditionem quæstionis, eruntque A & $\frac{46}{75}A = E$, & $\frac{4}{5}A = I$ & $\frac{19}{25}A = O$. sumatur igitur pro A numerus quivis qui dividuus est per denominatores reliquorum, 75, 25, 5 & fiet propositum. Esto A 75: erit E 46 & I 60 & O 57.

PRAXIS.

PRAXIS.

$\frac{5}{16}A + \frac{5}{8}E = I$ & $\frac{21}{24}A - \frac{3}{16}E = O = \frac{9}{2}E - \frac{8}{1}A$

$$\text{Et}\ \underbrace{\overbrace{\frac{21}{24} + \frac{48}{1}}^{69}}_{24}\ A = \underbrace{\overbrace{\frac{72}{2} + \frac{3}{16}}^{75}}_{16} E \qquad 3)\ 138.225 :: 46.75 :: E.A. \quad 8)\ \underbrace{\frac{69}{24}\ \ \frac{75}{16}}_{48}$$

$$\begin{matrix} & 1 & 8 & & 3 & 2 \end{matrix}$$

XXVII. Invenire tres numeros (A, E, I,) ſic ut $A + \frac{1}{3}E + \frac{1}{3}I = E + \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}A = I + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}E$ reſolvantur tres numeri in A juxta conditionem quæſtionis, erunt A, & $\frac{17}{13}A = E$ & $\frac{19}{13}A = I$. ſumatur igitur pro A numerus quivis qui dividuus eſt per denominatores reliquorum 13 & 13 & fiet propoſitum. Eſto A 13, Erit E 17 & I 19.

PRAXIS.

$8E - 9A = I = \frac{16}{15}E + \frac{1}{15}A$. Vel

$$\underbrace{\overbrace{\frac{120 - 16}{8 - 16}}^{104}}_{\substack{1 \quad 15 \\ 15}} E = \underbrace{\overbrace{\frac{135 + 1}{9 + 1}}^{136}}_{\substack{1 \quad 15 \\ 15}} A \quad \text{Quare \&c:}$$

Et

$\frac{9}{8}A + \frac{1}{8}I = E = \frac{15}{16}I - \frac{1}{16}A$ vel

$\overbrace{\frac{2}{8}+\frac{1}{16}}^{19} A = \overbrace{\frac{15}{16}-\frac{1}{8}}^{14} I$ :: I. A vel

$\underbrace{1 \quad 2}_{16} \qquad \underbrace{2 \quad 1}_{16}$ 14. 19 :: A. I.

XXVIII. Invenire quatuor numeros (A,E,I,O) ſic ut $A + \frac{1}{3}E + \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}O = E + \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}O + \frac{1}{4}A = I + \frac{1}{5}O + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}E = O + \frac{1}{6}A + \frac{1}{6}E + \frac{1}{6}I$ reſolvantur quatuor numeri in A juxta conditionem quæſtionis: eruntque A, & $\frac{77}{47} = E$ & $\frac{92}{47} = I$ & $\frac{101}{47} = O$. ſumatur igitur pro A numerus quivis qui dividuus ſit per denminatores reliquorum 47, & 47, & 47 & fiet propoſitum. Eſto A 47, erit E 77, & I 92, & O 101.

XXIX. Datis B & C invenire tertium ſub quo & B rectangulum, quadratum erit rectanguli ſub ipſo & C.
Eſto A Quare B A = Cq Aq. vel $\frac{B}{Cq} = A$.

XXX. Datis Z & Æ invenire duo latera.
Eſto majus A minus erit Z - A.
quare Z A - Aq = Æ
Atqui $\frac{1}{4}$ Zq - Æ = $\frac{1}{4}$ Xq. Et $\frac{1}{2}$ Z + $\frac{1}{2}$ X = A.

XXXI. Z & Z invenire duo latera. eſto majus A minus erit Z -- A. quare Zq -- 2 Z A + 2 Aq = Z vel
Z A - Aq = $\frac{Zq - Z}{2}$ = Æ. quare ut ſupra.

XXXII.

XXXII. Datis Z & X. invenire latera. Esto majus A, minus erit Z - A, quare 2 ZA - Zq = X. vel

$ZA = \frac{Zq + X}{2}$ vel $\frac{Zq + X}{2Z} = A$.

XXXIII. Datis X & Æ invenire latera Esto majus A minus erit A - X; quare Aq - AX = Æ Atqui &c.

XXXIV. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem sit ut S ad R, at summa numerorum ad summam quadratorum ut L ad T. Esto minor E, major erit $\frac{RE}{S}$, $\frac{SE + RE}{S}$.

$\frac{Sq\ Eq + Rq\ Eq}{Sq}$: : L. T Quare

$\frac{TSc + TSqR}{SRq} = E$

multiplica 2^o^ primos terminos per alternos quotos. & fiat depressio. & quia L multiplicat & dividit expungatur.

XXXV. Invenire duos numeros quorumminor ad majorem sit ut S ad R & differentia numerorum sit ad summam quadratorum ut L ad T.

XXXVI. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem sit ut S ad R. Et summa numerorum sit ad differentiam quadratorum ut L ad T.

XXXVII. Invenire duos numeros quorum minor

minor ad majorem ſit S ad R & diffrentia numerorum ad differentiam quadratorum ut L ad T.

XXXVIII. Invenire duos numeros quorum minor ſit ad majorem ut S ad R & major numerus ad quadratum minoris ut L ad T.

Eſto minor E. Æquatio erit $\frac{TR}{LS} = E$ quia

$\frac{RE}{S}$. Eq :: L. T.

XXXIX. Invenire duos numeros quorum minor ſit ad majorem ut S ad R. & quadratus minoris ad ipſum minorem ut L ad T.

XL. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S ad R & ſumma numerorum ad quadratum minoris ut L. ad T.

XLI. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S. ad R & differentia numerorum ad quadratum minoris ut L ad T.

XLII. Invenire duos numeros quorum minor ad majorem ſit ut S. ad R & minor numerus ad quadratum majoris; vel major numerus ad quadratum majoris vel ſumma vel differentea numerorum ad quadratum majoris ſit ut L ad T.

XLIII. Datis duobus numeris B & C invenire tertium A ſic ut C + A in B : A + B in C : & B + C in A æquali decreſcant intervallo. Quia in tribus numeris Arithmetice proportionalibus,

tionalibus, duplum medii æquatur summæ extremorum.

Erit $2CA + 2BC = BC + 2BA + CA$:

Quare $\frac{BC}{2B - C} = A$.

PRAXIS.

$C + A$	$A + B$	$B + C$
B	C	A
$BC + BA$	$CA + BC$	$BA + AC$.

FINIS. Libri I.

QUÆSTIONES

Libri II.

Diophanti Alexandrini.

I INvenire duos numeros A. E sic ut Z. Z : : S.R Esto minor E : Assumptoque numero B quocunque sit B E major ;
Quare B E + E. Bq Eq + Eq : : S. R.
Quare $\frac{BR + R}{BqS + S} = E$.

II. Invenire duos numeros A, E: sic ut X. X : : S. R. Æquatio Erit
$\frac{BR -- R}{BqS -- S} = E$.

III. Invenire duos numeros A,E sic ut Z. Æ:: S.R Esto minor E assumptoque B sit BE major, Quare B E + E : B Eq:: S. R. quare $\frac{BR + R}{BS} = E$.

IV. Invenire duos numeros A, E, sic ut X. Z : : S. R. Esto minor E, major B E.

PRAXIS.

B E - E. Bq Eq + Eq : : S. R. Quare

BRE-

$$BRE - RE = Bq\,SEq + SEq \text{ quare } \frac{BR - R}{Bq\,S + S} = E.$$

V. Invenire duos numeros A, E sic ut Z.X. :: S.R. Æquatio erit $\frac{BR + R}{Bq\,S + S} = E.$

VI. & VII. Invenire duos numeros A, E sic ut X sit B: & X. sit C: sit minor E, major erit B + E, differentia quadratorum $Bq + 2\,BE = C.$ Quare $\frac{C - Bq}{2B} = E.$

VIII. & IX. Datum Bq in duo quadrata dividere. Esto unum e quæsitis Aq cujus latus A, alterum erit Bq - Aq : cujus latus (assumpto nùmero C quocunque) Esto CA - B hujus autem quadratum est

$$Cq\,Aq - 2\,C\,BA + Bq = Bq - Aq \text{ quare } \frac{2CB}{Cq + 1} = A.$$

Si Bq sit 16: & C 3. Q: $\frac{24}{10}$ + Q: $\frac{32}{10}$ = 16.
Si Bq sit 16 & C 5. Q: $\frac{40}{26}$ + Q: $\frac{96}{26}$ = 16.

Hinc patet inventio triangulorum Rectangulorum

$\frac{24}{10} \times \frac{24}{10} = \frac{576}{100}$. & $\frac{32}{10} \times \frac{32}{10} = \frac{1024}{100} = 16$ vel

$\frac{40}{26} \times \frac{40}{26} = \frac{1600}{676}$. & $\frac{96}{26} \times \frac{96}{26} = \frac{9216}{676}$ hoc est

$$\left.\begin{array}{r} 1600 \\ 9216 \\ \hline 10816 \end{array}\right\} = 676)\ 10816\ (16.$$

X. Dividere Bq + Cq datum in duo alia quadrata. sit B major quam C. assumptis duobus

 numeris

numeris quibuscunque R majore: & S minore: Esto latus unius R A - B: & latus alterius SA - C horum quadrata

$$\text{Sunt} \begin{cases} Rq\ Aq - 2\ B\ R\ A + Bq = Bq \\ Sq\ Aq - 2\ C\ S\ A + Cq = Cq \end{cases}$$

Quare $\frac{2BR + 2CS}{Rq + Sq} = A$ At vero latus binom: fuit S A - C

hoc est $\frac{2\ B\ R\ S + 2\ C\ Sq - C\ Rq - C\ Sq}{Rq + Sq}$

Hujus quadratum si tollas e Bq + Cq restabit quadratum aliud.

XI. Invenire duos numeros quadratos quorum differentia sit BC. assumpto numero conveniente D Esto latus minoris A, majoris A + D: quadratorum ex his differentia 2 D A + Dq = B C quare $\frac{B\ C - Dq}{2\ D} = A$

vel esto major A, minor A - F $\frac{B\ C + Fq}{2\ F} = A$.

Lemma pro XII. Si duobus numeris B, C, datis tertius D quæratur, qui ad utrumque adjunctus conficiat quadratum numerum, differentia ipsorum B - C est gnomon, cujus longitudo est 2 A + E, & latitudo E, Estque longitudinis & latitudinis semisumma A + E latus quadrati majoris, & semidifferentia A latus quadrati minoris, sumantur igitur duo numeri quicunque E pro latitudine, & F pro longitudine: sic ut F E = B - C, & ex Q: $\frac{1}{2}$ F + $\frac{1}{2}$ E

$\frac{1}{2}$ E tollatur B: vel ex Q: $\frac{1}{2}$ F - $\frac{1}{2}$ E tollatur C. & reſtabit numerus D quæſitus.

Exempli gratia, ſi ſint duo quadrata A + 6 & A + 1, horum differentia 5 eſt gnomon. & quia $5 \times 1 = 5$ ſumatur pro latitudine gnomonis 1 & pro longitudine 5, Harum ſemiſumma 3 eſt latus quadrati majoris 9, e quo ſi tollas 6 reſtabit 3 pro numero quæſito, ſemidifferentia autem eſt 2 latus quadrati minoris, e quo ſi tollas 1 reſtabit tertium 3.

XII. Invenire numerum qui adjectus ad B & ad C complebit duos numeros quadratos. Eſtque B $<$ C

Fieri poteſt per lemma: vel aliter.

Quadratum minus eſto Aq. quæſitus igitur numerus erit Aq - C, huic ſi addas B habebis majus quadratum ſc: Aq - C + B cujus latus eſto A - D (aſſumpto D ſic ut Dq $<$ B - C) quare Aq - 2 D A + Dq = Aq - C + B vel $\frac{Dq + C - B}{2D} = A$.

Tum ex Aq tolle C: eritque numerus quæſitus. Vel latus eſto A + D, aſſumpto D $< \sqrt{}$: B - C: Erit $\frac{B - C - Dq}{2D} = A$.

XIII. Invenire numerum qui ablatus e B & C, relinquit duos numeros quadratos eſt que B $<$ C: Eſto quadratum minus Aq: quare C - Aq erit numerus quæſitus. Et B - C + Aq quadratum majus. hujus latus eſt A - D aſſumpto D $< \sqrt{}$: B - C: quare Aq - 2 D A + Dq = Aq + B - C.

Vel

Vel $\frac{Dq - B + C}{2D} = A$.

Tum e C tolle Aq eritque numerus quæsitus

Vel latus esto A - D, assumpto D $<$ √ : B - C

Eritque $\frac{B - C - Dq}{2D} = A$.

XIV. Invenire numerum e quo si subtrahantur B & C restabunt bina quadrata: eritque B $<$ C Esto numerus quæsitus Aq + C, ut subtracto C maneat quadratum majus Aq; subtrahatur etiam B & restabit Aq - B + C cujus latus esto A - D assumpto D $<$ √ : B - C : quare Aq - 2 D A + Dq = Aq - B + C vel $\frac{Dq + B - C}{2D} = A$

Tum ad Aq adde C eritque numerus quæsitus, vel etiam fieri potest per Lemma.

XV. Dividere B in duas partes sic ut Aq adjectum ad utramque partem compleat bina quadrata.

Assumantur C & D, ut Cq + Dq $<$ B sitque C $<$ D

Q: A + C. est Aq + 2 C A + Cq : minus Aq } Restat
Q: A + D. est Aq + 2 D A + Dq : minus Aq }

2 C A + Cq }
2 D A + Dq } B. quare $\frac{B - Dq - Cq}{2D + 2C} = A$

hæ duæ sunt partes ipsius B

vide 24 lib: 3.

XVI. Dividere B in duas partes sic ut quadratum A + C, assumpto C $<$ √ B minutum utraque

traque relinquat bina quadrata. Quadratum igitur ſubducendum eſt Aq + 2 C A + Cq e quo ſi tollatur 2 C A + Cq reſtabit Aq Et e quo ſi tollatur 2 C A + Cq - 2 D A - Dq aſſumpto D ⊳ C Reſtabit

Aq + 2 D A + Dq quod eſt Q: A + D
vide 23 lib 3.

XVII. Invenire duos numeros in Ratione R ad S. ſic ut adjecti ad Bq compleant bina quadrata. Eſto latus minoris quadrati A + B. Erit quadratum minus Aq + 2 B A + Bq. Tolle Bq reſtabit minor numerus Aq + 2 B A

At S. R :: Aq + 2 B A. $\frac{RAq + 2 RBA}{S}$ + Bq quadratum majus, cujus latus aſſumpto C ⊲ √: R, eſto C A - B quare Cq Aq - 2 C B A - Bq = $\frac{RAq + 2 RBA}{S}$ + Bq. vel $\frac{2 RB + 2 CB}{SCq - SR}$ = A.

XVIII. Invenire tres numeros ſic ut æquales ſint $\begin{cases} \frac{4}{5} \text{ pri.} - C + \frac{1}{7} \text{ ter.} + F \\ \frac{6}{7} \text{ ter.} - F + \frac{1}{6} \text{ ſec.} + D \\ \frac{5}{6} \text{ ſec.} - D + \frac{1}{5} \text{ pri.} + C \end{cases}$

Quia nullus numerus proponitur ad quem inſtituenda ſit æquatio, poterit quæſtio innumeris modis expediri; vel ſupponendo ſummam trium numerorum quæſitorum: vel aſſumendo duos numeros ad A quæſit: qui aptiſſimi pro quæſtione erunt 5 A & 6 A. atque hunc poſteriorem in hac 18ª quæſtione ſequitur Diophantus

tus: quia prioris modi exemplum erit in quæstione 19ª.

Esto igitur primus 5 A, & secundus 6 A; quare 4 A - C + $\frac{1}{7}$ ter. + F = 5 A - D + A + C. vel 2 A + 2 C - D - F = $\frac{1}{7}$ ter. & $\frac{6}{7}$ ter - F + A + D = 5 A - D + A + C. Vel 5 A + C - F + A + D = 5 A - D + A + C. Vel 5 A + C - 2 D + F = $\frac{6}{7}$ tert: = 12 A + 12 C - 6 D - 6 F

$$\text{vel } \frac{-11\,C + 4\,D + 7\,F}{7} = A.$$

XIX. Dividere B in tres numeros sic ut æquales sint $\left\{\begin{array}{l} \frac{4}{5}\text{ pri.} - C + \frac{1}{7}\text{ ter.} + F \\ \frac{6}{7}\text{ ter.} - F + \frac{1}{6}\text{ sec.} + D \\ \frac{5}{6}\text{ sec.} - D + \frac{1}{5}\text{ pri.} + C \end{array}\right.$ Esto primus A

Quoniam omnes tres æquationes (omissis iis quæ se mutuo perimunt) constituunt B: quælibet ex iis erit $\frac{1}{3}$ B quare

$\frac{1}{3}$ B + C - F - 4 A = $\frac{1}{7}$ tertii. Et

$\frac{2}{3}$ B - 6 C + 7 F + 24 A - D = $\frac{1}{6}$ secundi. Et

$\frac{26}{3}$ B + 29 C + 6 D - 35 F = 121 A. Ergo

$$\frac{26\,B + 87\,C + 18\,D - 105\,F}{363} = A$$

XX. Invenire tres numeros E, M, A sic ut Aq - Mq. Mq - Eq : : 3. 1

Esto minor E, & medius E + B cujus quadratum est Eq + 2 B E + Bq: tollatur Eq, differentia erit 2 B E + Bq cujus quadratum una cum Eq est Eq + 8 B E + 4 Bq pro quadrato maximi cujus latus (assumpto C convenienter)

Esto

Esto E + C. quare Eq + 2 C E + Cq = Eq + 8 B E + 4 Bq vel 8 B E - 2 C E = Cq - 4 Bq. vel $\frac{Cq - 4Bq}{8B - 2C}$ = E.

XXI. Invenire duos numeros E & A sic ut tum Eq + A tum Aq + E sint numeri quadrati

Minor esto E: & assumpto B quocunque latere E + B. fiat quadratum Eq + 2 B E + Bq: unde si tollas Eq restabit pro numero majore 2 B E + Bq: hujus quadratum 4 Bq Eq + 4 Bc E + Bqq: plus E erit etiam quadratum: cujus latus (assumpto convenienter C) esto 2BE - C Quare 4 Bq Eq — 4 B C E + Cq = 4 Bq Eq + 4 Bc E + E + Bq: vel 4 B c E + 4 BC E + 1 in E = Cq — B qq vel &c.

XXII. Invenire duos numeros A & E sic ut tum Aq — E, tum Eq — A sint numeri quadrati Esto minor numerus E + 1 cujus quadratum est Eq + 2 E + 1 & sublato Eq erit major numerus 2 E + 1, & majoris quadratum 4 Eq + 4 E + 1 ab hoc sublato minore E + 1 erit 4 Eq + 3 E quod etiam est quadratum cujus latus esto 3 E. Quare 9 Eq = 4 Eq + 3 E: vel 5 E = 3 vel $\frac{3}{5}$ = E

Hæc est solutio Diophanti: quæ non tenet nisi numerus primo assumptus fuerit 1, si vero assumendus Alter B, solvi hoc modo non potest:

Nos igitur generalem regulam trademus hanc

Esto minor numerus E + B cujus quadratum est Eq + 2 B E + Bq & sublato Eq erit major numerus,

merus, $2BE+Bq$, & majoris quadratum $4BqEq+4BcE+Bqq-E-B$, quod etiam est quadratum. cujus latus esto $2BE+Bq-C$. Quare $4BqEq+Bqq+4BcE-4BCE-2BqC+Cq=4BqEq+Bqq+4BcE-E-B$. vel $-Cq-2BqC-4BCE=E-B$ vel $Cq+B-2BqC=4BCE-E$. Quare nota quod C non debet esse minor quam $2Bq$. Item si detur B & alteruter numerus, datur Alter nam primo datur E: Deinde $2B+Bq+\sqrt{q}:Q:2B+Bq-B-E=C$.

XXIII. Invenire duos numeros a & e sic ut tnm $aq+a+e$ tum $eq+a+e$ sint num: quadrati. Esto minor E assumatur $E+B$, cujus quadratum $Eq+2BE+Bq$ æquale cogitetur $eq+a+e$, tollatur igitur $Eq+E$ (sitque $2B-1=C$) restabit major ($CE+Bq$: hujus quadratum est $CqEq+2BqCE+Bqq$: adponatur a & e hoc est $2BE+Bq$. summa $CqEq+2BqCE+2BE+Bqq+Bq$ erit etiam quadratus numerus. cujus latus esto $CE-D$. Quare $CqEq-2CDE+Dq=CqEq+2BqCE+2BE+Bqq+Bq$

$$\text{Vel } E=\frac{2CD+2BqC+2B.}{Dq-Bqq-Bq.}$$

XXIV. Invenire duos numeros a, e sic ut $aq-a-e$ & $eq-a-e$ sint numeri quadrati

Esto minor E. assume $E+1$ quadratum, $Eq+2E+1$ pro $eq+a+E$) tolle $Eq+E$ restat $E+1$ pro majore, huic adde E: & summa $2E+1$

sublata

ſublata ex Eq, reſtabit Eq — 2 E — 1, etiam quadratus numerus. cujus latus eſto E — 3. quare Eq — 6 E + 9 = Eq -- 2 E -- 1 vel E = $\frac{5}{2}$

Cæterum hæc ſolutio Diophantæa imperfecta eſt, concludit enim ſolummodo quod eq - a - e eſt numerus quadratus: de reliqua vero quæſtionis parte quod aq - a - e ſit quadratus numerus nihil probatur omnino. quod vero in hoc exemplo utraque pars vera eſſe contingit, gratia ipſi numero 3 poſteriori aſſumpto habenda eſt, quem non artificio ſed tentando invenit.

Veram igitur & generalem ſolutionem exhibeo Eſto minor numerus E: aſſume E - B quadratum erit Eq - 2 B E + Bq, pro eq - a - e tolle ex Eq - E (ſitque B - 1 = C) reſtabit C E - Bq pro majore: quadratum erit. Cq Eq - 2 C Bq E + Bqq hinc tolle (a + e) 2 B E - Bq etiam quadratus numerus cujus latus eſto C E -- D. quare Cq Eq - 2 C D E + Dq = Cq Eq - C Bq E - 2 B E + Bqq + Bq

Vel $E = \frac{Dq -- Bqq -- Bq}{2cD - 2CBq - 2B}$

quare Dq non debet eſſe minor quam Bqq - Bq.

XXV. Invenire duos numeros a & e ſic ut Q: a + e, - a & Q: a + e, + e fiant numeri quadrati.

Aſſumantur tres quadrati numeri puta 4, 9, 16, & minimus 4 tollatur e reliquis: differentiæ erunt 5 & 12.

Tum ſummæ quadratum eſto 4 Aq. Et major

 numerus

numerus esto 12 Aq & minor 5 Aq horum summa est 17 Aq cujus quadratum est 289 Aqq = 4 Aq : vel Aq = $\frac{4}{289}$ hac interpretatione pro 12 Aq & 5 Aq duo numeri erunt $\frac{48}{289}$ & $\frac{20}{289}$.

XXVI. Invenire duos numeros a & e, sic ut Q: a + e, - a & Q: a + e, - e sint quadrati numeri

Assumantur tres quadrati numeri, puta 4, 9, 16, & duo minores tollantur e majore, eruntque differentiæ 12 & 7, Tum summæ quadratum esto 16 Aq. Et major numerus esto 12 Aq minor 7 Aq, reliqua fiant ut in 25.

XXVII. Invenire duos numeros a & e sic ut ae + a & ae + e sint numeri quadrati quorum latera simul constituunt Z. Esto primus numerus A : secundus Bq A - 1. rectangulum ex his Bq Aq - A. cui si addas primum, eritque Bq Aq cujus latus est · B A, Tum rectangulo etiam addatur secundus (sitque Bq - 1 = C) eritque summa Bq Aq + C A - 1 quadratus numerus cujus latus juxta conditionem quæstionis est Z - B A. Quare Zq - 2 Z B A + Bq Aq = Bq Aq + C A -- 1 Vel

$$2ZBA + CA = Zq + 1. \text{ vel } \frac{Zq + 1}{2ZB + C} = A.$$

XXVIII. Invenire duos numeros a & e, sic ut a e - a & a e - e sint numeri quadrati quorum latera simul constituunt Z. Esto primus numerus A secundus Bq A + 1. rectangulum ex his Bq Aq + A cui subtrahas primum; restabit Bq Aq cujus

cujus latus est BA. Tum e rectangulo etiam subtrahatur secundns (sitque Bq - 1 = C) & restabit Bq Aq - CA - 1, numerus etiam quadratus, cujus latus juxta conditionem quæstionis est Z - B A Quare

Zq -- 2 ZBA + Bq Aq = Bq Aq -- CA -- 1

Vel $A = \frac{Zq + 1.}{2ZB - C}$

XXIX. Invenire duos quadratos aq & eq sic ut tum aq eq + aq tum aq eq + eq sint quadrati numeri

Esto primus Aq, pro secundo (donec idoneus inveniatur) ponatur 1. rectangulum erit Aq: prior summa 2 Aq: posterior Aq + 1 quare neutra est quadratus numerus, quærendus est igitur numerus cujus quadratum auctum unitate sit etiam quadratus numerus. Esto autem ille A - B cujus quadratum Aq - 2 BA + Bq = Aq + 1 vel $A = \frac{Bq - 1}{2B}$: cujus quadratum (sumpto Bq - 1 = C) est $\frac{Cq}{4Bq}$

Quare Cq + 4 Bq est Q.

Esto igitur secundus ille idoneus quem instituebamus quærere $\frac{Cq}{4Bq}$ Rectangulum erit $\frac{Cq\,Aq}{4Bq}$ summa prior $\frac{CqAq + 4BqAq}{4Bq}$ numerus quadratus, quia Cq + 4 Bq quadratusducitur in Aq.

summa

ſumma poſterior $\frac{Cq\ Aq + Cq}{4\ Bq}$ erit etiam quadratus numerus quia Cq Aq + Cq eſt quadratus numerus cujus latus eſto C A - D quare

$$Cq\ Aq - 2\ C\ D\ A + Dq = Cq\ Aq + Cq.$$

Vel. $A = \frac{Dq - Cq}{2\ C\ D}$

Quare ſit Bq. < 1 : & Dq < Cq.

XXX. Invenire duos numeros aq & eq ſic ut tum aq eq - aq. tum aq eq - eq ſint numeri quadrati.

Eſto primus Aq ſecundus 1 ut ante donec idoneus inveniatur : rectangulum erit Aq differentia prior C poſterior Aq - 1 quærendus eſt igitur numerus cujus quadratum minutum unitate ſit numerus quadratus. Eſto autem ille A - B cujus quadratus Aq - 2 B A + Bq = Aq - 1 : vel $\frac{Bq - 1}{2\ B}$ = A: cujus quadratus ſumpto Bq + 1 = C eſt $\frac{C\ q}{4\ Bq}$: quare Cq - 4 Bq eſt quadratus numerus. Eſto igitur ſecundus ille idoneus $\frac{C\ q}{4\ Bq}$:

Rectangulum erit $\frac{Cq\ Aq}{4\ Bq}$; differentia prior $\frac{Cq\ Aq - 4Bq\ Aq}{4\ Bq}$ numerus quadratus quia C q - 4 Bq quadratus ducitur in Aq : poſterior $\frac{Cq\ Aq - Cq}{4\ Bq}$ erit etiam quadratus quia Cq Aq

- Cq

-Cq est quadratus cujus latus esto CA-D quare CqAq-2CDA+Dq = CqAq-Cq.

Vel $A = \frac{Dq+Cq}{2CD}$.

XXXI. Invenire duos numeros a & e sic ut ae +a+e & ae-a-e sint numeri quadrati.

Propterea quod aq+eq+2ae = ξq & aq+eq-2ae = xq: sumantur duo latera puta 3 & 2, summa quadratorum ex ipsis est 13 & duplum rectangulum 12 estque tum 13+12 tum 13-12 numerus quadratus. Esto igitur rectangulum sub numeris quæsitis 13Aq, & numerus primus A, secundus erit 13A: Quare cum positæ A & 13A sint pro a & e: & 13Aq pro ae, & tum 13Aq+12Aq-, tum 13Aq-12Aq, sint numeri quadrati sicut etiam sunt ae+a+e, & ae-a-e sequitur 12Aq esse pro a+e quare 12Aq = 13A+A vel 12A = 14

Vel $A = \frac{7}{6}$.

XXXII. Invenire duos numeros a & e, sic ut tum a+e tum ae+a+e tum ae-a-e sint numeri quadrati.

Propterea quod a in 2a bis = 4aq, sumantur duo numeri in Ratione 1 ad 2, puta 2 ad 4. rectangulum sub ipsis duplum erit num: quadra: nempe 16. Estque summa quadratorum ex ipsis 20: quare 20+16, & 20-16 sunt N:Q.

Esto igitur rectang: sub numeris quæsitis 20-Aq, & numerus primus 2A: secundus erit

A. Estque per ostensa in 31 quæst: 16 Aq pro a + e erit 16 Aq = 12 A vel A = $\frac{3}{4}$.

XXXIII. Invenire tres numeros a, e, i, sic ut aq + e tum eq + i tum iq + a sint quadrati numeri.

Propterea quod differentia duorum proximorum quadratorum est minus latus duplicatum, plus 1; Esto primus numerus A secundus erit 2 A + 1 & tertius 4 A + 3; patet igitur quod Aq + 2 A + 1, & 4 Aq + 4 A + 1 pl: 4 A + 3, hoc est 4 Aq + 8 A + 4 sint quadrati numeri; adeo ut tertii quadratum 16 Aq + 24 A + 9 + A, hoc est 16 Aq + 25 A + 9, erit quadratus numerus; latus ejus esto 4 A - B: quare 16 Aq - 8 B A + Bq = 16 Aq + 25 A + 9

$$\text{Vel } \frac{Bq - 9}{25 + 8B} = A.$$

XXXIV. Invenire tres numeros a, e, i sic ut tum aq - e tum eq - i tum iq - a sint quadrati numeri.

Propterea quod differentia duorum proximorum quadratorum est majus latus duplicatum, minus 1. Esto primus numerus A + 1 secundus 2 A + 1 & tertius 4 A + 1. Patet igitur quod Aq + 2 A + 1 mi: 2 A + 1 & 4 Aq + 4 A + 1 mi: 4 A + 1 sint numeri quadrati. Patet igitur quod 16 Aq + 8 A + 1 mi: A + 1, hoc est 16 Aq + 7 A est quadratus numerus, latus esto B A: quare Bq Aq = 16 A + 7 A.

Vel

Vel $\frac{7}{Bq - 16} = A.$

A + B. 2 B A + Bq. 4 B c A + Aqq.

XXXV. Invenire tres numeros a, e, i sic ut tum aq + a + e + i tum eq + a + e + i, tum iq + a + e + i sint numeri quadrati.

Propterea quod per 5 e 2, Q: $\frac{1}{2}$ A - $\frac{1}{2}$ E: + Æ = Q: $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ E. Assumantur Z planum & B C = Z pl: & D F = Z pl: & G H = Z pl: quare tum Q: $\frac{1}{2}$ B - $\frac{1}{2}$ C + Z pl. tum Q: $\frac{1}{2}$ D - $\frac{1}{2}$ F + Z planum tum Q: $\frac{1}{2}$ G - $\frac{1}{2}$ H + Z pl: sunt numeri quadrati.

Esto igitur summa trium numerorum Z pl: Aq ipsi numeri (juxta conditionem quæstionis)

Erunt $\frac{1}{2}$ B A -- $\frac{1}{2}$ C A + $\frac{1}{2}$ D A -- $\frac{1}{2}$ F A + $\frac{1}{2}$ G A -- $\frac{1}{2}$ H A.

Quare $\frac{1}{2}$ B A -- $\frac{1}{2}$ C A + $\frac{1}{2}$ D A -- $\frac{1}{2}$ F A + $\frac{1}{2}$ G A -- $\frac{1}{2}$ H A = Z pl: Aq

Vel $\frac{B - C + D - F + G - H}{2 Z pl.} = A.$

XXXVI. Invenire tres numeros a, e, i, sic ut tum aq mi: a + e + i, tum eq mi: a + e + i, tum iq, mi: a + e + i sint numeri quadrati.

Propterea quod $\frac{1}{2}$ Zq -- Æ = $\frac{1}{4}$ Xq assumantur Z pl: & B C = Z pl: & D F = Z pl: & G H = Z pl: quare tum Q: $\frac{1}{2}$ B + $\frac{1}{2}$ C: - Z pl: tum Q: $\frac{1}{2}$ D + $\frac{1}{2}$ E -- Z pl: tum Q: $\frac{1}{2}$ G + $\frac{1}{2}$ H - Z

pl: sunt numeri quadrati. Esto igitur summa trium numerorum quæsitorum Z pl: Aq; ipsi numeri (juxta conditionem quæstionis) erunt $\frac{1}{2}$ B A + $\frac{1}{2}$ C A + $\frac{1}{2}$ D A + $\frac{1}{2}$ F A + $\frac{1}{2}$ G A + $\frac{1}{2}$ H A = Z pl: Aq.

$$\text{Vel } \frac{B + C + D + F + G + H}{2 \text{ Z pl.}} = A.$$

FINIS. Libri Secundi.

QUÆSTIONES

Libri III.

Diophanti Alexandrini.

I. INVENIRE a, e, i, ſic ut tum a + e + i -- aq: tum a + e + i - eq tum a + e + i -- iq ſint Q: numeri.

Eſto primus A: ſecundus B A. ſumma quadratorum ex ipſis Bq Aq + Aq, dividatur per l. 2, 10 in duos alios quadratos nempe Cq Aq + Dq Aq, tertius eſto D A qui ſi addatur ad duos primos ſumma erit A + B A + D A = Bq Aq + Aq Quare $\frac{B + D + 1}{Bq + 1}$ = A. Nam quia per fabricam tum Bq Aq + Aq in Aq: Bq Aq + Aq in Bq Aq: tum Bq Aq + Aq in Dq eſt numerus quadratus. ſic ſumma trium illorum numerorum quorum latera ſubtrahuntur ſit Bq Aq + Aq factum eſt quod poſtulatur at ſumma eſt B + D + 1 Ergo.

II. Invenire a, e, i ſic ut tum a + Q: a + e + i tum e + Q: a + e + i tum i + Q: a + e + i ſit numerus quadratus.

Eſto ſumma trium A, cujus quadratum Aq & ſumptis tribus numeris B C. D (3, 8 15)

sic ut singulis adjuncta 1 constituat quadratum numerum. sunto tres numeri quæsiti B Aq, C Aq, D Aq, quorum summa est B Aq + C Aq + D Aq at summa ipsorum ponitur A.

$$\text{Quare } \frac{1}{B+C+D.} = A.$$

III. Invenire a, e, i, sic ut tum Q: a + e + i in a, tum Q: a + e + i in e, tum Q: a + e + i in i sit Q: numerus.

Esto summa trium B A cujus quadratum est Bq Aq & sumptis tribus numeris C D F, sic ut singuli ablati ex Bq relinquant numerum quadratum: puta tres numeri quæsiti C Aq, D Aq, F Aq quorum summa est C Aq + D Aq + F Aq: at summa ipsorum ponitur B A

$$\text{quare } \frac{B}{C+D+F} = A.$$

IV. Invenire a, e, i, sit ut a - Q: a + e + i tum e - Q: a + e + i tum i - Q: a + e + i sit numerus quadratus.

Esto summa trium A cujus quadratum Aq, & sumptis tribus numeris B, C, D (2, 5, 10,) sic ut 1 dempta e singulis relinquat quadratum numerum, sunto tres numeri quæsiti B Aq, C Aq, D Aq, quorum summa est B Aq + C Aq + D Aq at summa ipsorum ponitur A

$$\text{quare } \frac{1}{B+C+D.} = A.$$

V. In-

V. Invenire tres numeros, a, e, i, sic ut tum summa $a + e + i$ tum tres differentiæ $a + e - i$ tum $e + i - a$ tum $i + a - e$ sint Q: numeri.

Esto summa trium quadratum $Aq + 2\,B\,A + Bq$: item $a + e - i$ esto quadratus aliquis numerus puta Bq, Jam quia datur summa trium & differentia primi & secundi a tertio datur etiam tertius, sublata enim differentia e summa, (nam $a + e + i - a - e + i = 2\,i$) restat tertius duplus $Aq + 2\,B\,A$ est igitur tertius $\frac{1}{2}\,Aq + B\,A$.

Item $e + i - a$ Esto quadratus aliquis numerus puta Aq differentiam hanc tolle de summa erit primus duplus. (nam $a + e + i - e - i + a) =$ $2\,B\,A + Bq$ est igitur primus $B\,A + \frac{1}{2}\,Bq$. summa primi & tertii, $\frac{1}{2}\,Aq + 2\,B\,A + \frac{1}{2}\,Bq$, subtracta e summa trium $Aq + 2BA + Bq$ relinquit $\frac{1}{2}\,Aq + \frac{1}{2}\,Bq$ pro secundo.

Quare $i + a - e$ erit $2\,B\,A$ quadratus etiam numerus, esto ille Cq: est igitur $2\,B\,A = Cq$.

Ideoque $\frac{Cq}{2B} = A$ vide: 6^{tm}.

VI. Vel etiam sic. Propterea quod $a + e - i$ pl: $e + i - a$. pl: $i + e - a = a + e + i$ Inveniantur per lemma sequens tres numeri quadrati quorum summa est quadratus numerus. sintque 4, 9, 36, quorum summa est 49. sumantur tres illi numeri pro tribus differentiis $\frac{49-4}{2}$, $\frac{49-9}{2}$, $\frac{49-36}{2}$ hoc est $22\,\frac{1}{2}$, 20, & $6\,\frac{1}{2}$ sunt tres numeri quæsiti.

Lemma

Lemma: Invenire tres numeros quadratos, quorum summa etiam sit quadratus numerus. Esto primus Aq: pro secundo assumatur Bq & pro summa omnium Aq + 2 C A + Cq est igitur tertius 2 C A + Cq assumatur autem pro tertio Dq quare 2 C A + Cq = Dq : vel $\frac{Dq - Cq}{2C}$ = A. si B sit 3, C, 1, D, 2. prodibunt ut ante 4, 9, 36.

VII. Invenire tres a, e, i sic ut tum a + e + i tum a + e tum e + i tum i + a sint numeri quadrati.

Esto summa trium Aq + 2 B A + Bq & summa primi & secundi Aq, quare tertius 2 B A + Bq. Iterum summa secundi & tertii Aq - 2 B A + Bq, hanc tolle ex Aq + 2 B A + Bq, manebit primus 4 B A, hunc tolle ex Aq manebit secundus Aq - 4 B A hunc etiam tolle ex Aq + 2 B A + Bq manebit 6 B A + Bq summa tertii & primi, numerus quadratus cujus latus assumamatur C, Quare 6 B A + Bq. = Cq

Vel $\frac{Cq - Bq}{6B}$ = A vide 8^am.

VIII. Aliter, Esto summa trium Aq + 2 B A + Bq : & summa primi & secundi Aq. quare tertius 2 B A + Bq. iterum esto summa secundi & tertii Aq - 2 B A + Bq, tolle tertium & manebit secundus Aq -- 4 B A tolle ex Aq & manebit primus 4 B A, huic addatur tertius erit

erit 6 B A + Bq, ſumma tertii & primi cujus latus aſſumatur C.

IX. Invenire tres a, e, i, ſic ut tum a - e = e - i, ſuntque tres ſummæ tum a + e tum e + i tum i + a Numeri quadrati.

Inveniantur per Lemma ſequens tres numeri quadrati, Bq, Cq, Dq ſic ut Bq - Cq = Cq - Dq. ſumantur hi tres pro tribus ſummis numerorum quæſitorum. Eſto ſumma trium A. Erit primus A - Dq & ſecundus A - Cq & tertius A - Bq. ſumma igitur omnium erit 3 A - Bq - Cq - Dq = A

$$\text{Vel } \frac{Bq + Cq + Dq.}{2} = A.$$

Lemma: Invenire tres numeros quadratos æqualis exceſſus.

Eſto primus Aq : ſecundus Aq + 2 F A + Fq tertius Aq + 4 F A + 2 Fq : qui etiam quadratus eſt numerus : cujus latus eſto A - G. quare Aq - 2 G A + Gq = Aq + 4 F A + 2 Fq.

$$\text{Vel } \frac{Gq - 2 Fq}{2 G + 4 F} = A.$$

quare G debet eſſe major quam 2 F : ſi ſumatur F 1, & G 8

$$\text{Erit } \frac{Bq\ 2401.\ Cq\ 1681,\ Dq.\ 961.}{100.}$$

X. Invenire tres a, e, i, ſic ut tum a + e + B tum a + i B tum e + i + B, tum a + e + i + B ſit numerus quadratus.

Aſſuman-

Assumantur ad A tres numeri C, D, F, sic ut ipsorum quadrata excedant B. Et primo A + C, cujus quadratum Aq + 2 C A + Cq esto a + e + B: quare Aq + 2 C A + Cq - B, est summa primi & secundi. secundo A + D cujus quadratum Aq + 2 D A + Dq, est e + i + B. quare Aq + 2 D A + Dq - B est summa secundi & tertii. Tertio A + F, cujus quadratum Aq + 2 F A + Fq esto a + e + i + B: Quare Aq: + 2 F A + Fq : - B est summa omnium trium. tolle inde Aq + 2 C A + Cq - B summam primi & secundi restabit tertius 2 F A - 2 C A + Fq - Cq. Item tolle inde Aq + 2 D A + Dq - B, summam secundi & tertii restabit primus 2 F A - 2 D A + Eq -- D. Hinc tolle ex Aq + C A + Cq - B summam primi & secundi restabit secundus Aq + 2 C A + 2 D A + 2 F A + Cq + Dq + Fq-B.

Jam vero summa tertii & primi & B est 4 F A - 2 C A - 2 D A + 2 Fq - Cq-Dq + B quadratus numerus, cujus latus esto G. quare 4 F A - 2 C A - 2 D A + Fq - Cq - Dq + B = Gq.

$$\text{Vel}\quad \frac{Gq + Cq + 2\,Dq - 2\,Fq - B}{4F - 2C - 2D} = A.$$

Si assumatur B 3, C 2, D 3, F 4, G 10. erit A. 13.

XI. Invenire tres a, e, i, sic ut a + e - B, tum e + i - B: tum i + a - B tum i + e + i - B. sit quadratus numerus. Esto Aq + B, summa primi & secundi, assumantur duo numeri C & D: Et primo A + C, cujus quadratum Aq + 2 C A + Cq + B: esto summa secundi & tertii. Deinde

e A

e A + D, cujus quadratum Aq + 2 D A + Dq + B eſt ſumma trium. tolle inde ſummam primi & ſecundi reſtabit tertius 2 D A + Dq. item tolle inde ſummam ſecundi & tertii, reſtabit primus 2 D A - 2 C A + Dq - Cq. Hunc tolle ex Aq + B ſumma primi & ſecundi reſtabit ſecundus Aq - 2 D A + C A - Dq + Cq + B. Jam vero ſumma tertii & primi, dempto B eſt 4 D A + 2 D C - 2 C A - C q - B quadratus numerus cujus latus eſto F. Quare 4 D A + 2 D - 2 Cq - B = Fq. Vel

$$\frac{Fq + Cq - 2D + B}{4D - 2C} = A \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ſi } B\ 3.\ C\ 1,\ D\ 1 \\ F\ 8:\ \text{Erit } A\ 10. \end{array} \right.$$

XII. Invenire tres numeros a, e, i, ſic ut tum a e + B tum e i + B : tum i a + B. ſit numerus quadratus.

Inveniantur per Lemma ſequens duo numeri quadrati ſic ut uterque addito B conſtituat quadratum numerum. Sintque Cq & Dq.

Eſto igitur primus Cq A ſecundus $\frac{1}{A}$, tertius Dq A : ſic fiet enim ut tum $\frac{Cq\ A + B}{A}$ tum tum $\frac{Dq\ A + B}{A}$ ſit quadratus numerus: erit & B Cq Dq Aq + B quadratus numerus cujus latus eſto CD A + F unde $\frac{B - Fq}{2CDF} = A$.

Lemma invenire aq, eq ſic ut tum aq + B: tum

Q eq

eq + B sit num : quadrat : fieri potest, vel per L: 2 : 11 : si assumatur G & pro a ponatur A & pro e A + G vel A - H æquationes erunt $\frac{B - Gq}{2G} = A = \frac{B - Hq}{2H}$: Si numerus datus sit 12, assumptis numeris 2, & 3, quadrati inventi erunt 4 & $\frac{1}{4}$. Aliter ex gnomone 12 quærendus est A dupl : assumantur pro E duo quilibet numeri minores quam latus 12 puta 2 & 3 :

Tollatur Eq è 12 restabit duplex rectangulum 8 vel 3 rectangulum igitur simplex 4 vel $\frac{1}{2}$ dividatur per E 2 vel 3 & quotus erit 2 vel $\frac{1}{2}$ pro A.

XIII. Iuvenire tres a, e, i, sic ut tum a e - B : tum ei-B tum i a - B : sit quadratus numerus.

Inveniantur per Lemma sequens duo numeri quadrati sic ut uterque dempto B constituat quadrat : numerum sintque Cq & Dq. Esto igitur primus Cq A : secundus $\frac{1}{A}$: tertius Dq A : sic enim fiet ut tum $\frac{Cq A}{A}$ - B, tum $\frac{Dq A}{A}$ - B sit quadratus numerus: Erit & Cq Dq Aq - B qnadratus numerus cujus latus esto C DA-F: Unde $\frac{B + Fq}{2CDF} = A.$ (B 10)

Lemma invenire aq, eq sic ut tum aq - B : tum eq - B : sit numerus quadratus. pro a ponatur

tur A & pro e A - G vel A - H æquationes erunt $\frac{B + Gq}{2G} = A = \frac{B + Hq}{2H}$ ſicut in Lemmate præcedente.

Aliter ex gnomone quærendus eſt A + E. aſſumantur pro E duo quivis numeri minores quam √ 10 puta 1 & 2.

Eritque A vel 5 ½ vel 3 ½.

XIV. Invenire a, e, i, ſic ut tum a e + i tum ei + a tum ia + e ſit numerus quadratus, Eſto primus A & aſſumpto A + 2 B, fiat e quadratum Aq + 4 B A + 4 Bq. ſit tertius Bq. rectangulum ſub ſecundo & tertio auctum primo eſt Bq A + A + 2 Bc & rectangulum ſub tertio & primo auctum ſecundo eſt Bq A + A + 2B quæ duo quia cogitantur eſſe quadrata quorum differentia eſt 2 B c -- 2 B quæ ranturper L:2:1 1 bini quadrati numeri diſtantes. intervallo 2 B c - 2 B, ſitque major Cq = Bq A + A + 2 Bc & minor Dq = Bq A + A + 2 B

$$\text{Quare } \frac{Cq - 2\,B\,c}{Bq - 1} = A = \frac{Dq - 2\,B.}{Bq - 1}$$

X V. Invenire a, e, i, ſic ut tum a e -- i tum e i - a tum i a -- e ſit numerus quadratus.

Eſto primus A, ſecundus A + Bq: horum rectangulum eſt Aq + Bq A: eſtque tertius Bq A. Rectangulum ſub ſecundo & tertio imminutum primo Bq Aq + Bqq A - A Rectangulum ſub tertio & primo imminutum ſecundo Bq Aq - A - Bq quæ duo quia cogitantur eſſe quadrata; Eſtq; διπλοισότης

ad Bq Aq ideoque differentia Bqq A + Bq (per Lemma ad 12 lib: 2) est gnomon cujus longitudo sit 2 B A + $\frac{2}{B}$ & latitudo $\frac{Bc}{2}$ harum semisumma B A + $\frac{1}{B}$ + $\frac{Bc}{4}$ est latus quadrati majoris Bq Aq + Bqq A - A) & semidifferentia B A + $\frac{1}{B}$ - $\frac{Bc}{4}$ latus quadrati minoris. Bq Aq - A - Bq. quibus computatis atque comparatis, utraque æquatione prodibit. $\frac{\text{Bqq cc} + 8\ \text{Bqq} + 16}{8\ \text{cc} - 8\ \text{Bq}}$ = A. Ardua sed si B sit 2 satis est facilis.

XVI. Invenire a, e, i sic ut tum a e + iq tum e i + aq tum i a + eq sit numerus quadratus. Esto primus B A secundus 4 B A + 4 C tertius C. Rectangulum sub primo & secundo auctum quadrato tertii est 4 Bq Aq + 4 B C A + Cq = Q: 2 B A + C. Rectangulum sub secundo & tertio auctum quadrato primi 4 Cq + 4 B C A + Bq Aq = Q: B A + 2 C, Rectangulum sub tertio & primo auctum quadrato secundi est 16 Bq Aq + 33 B A C + 16 Cq cujus latus esto 4 B A - D hinc invenietur $\frac{\text{Dq} - 16\ \text{Cq}}{33\ \text{BC} + 8\ \text{BD}}$ = A.

XVII. Invenire a, e, i, sic ut tum a e + a + e tum e i + e + i tum i a + i + a sit quadratus numerus.

Quia factus a duobus quadratis proximis auctus ipsorum

ipſorum ſumma eſt etiam quadratus numerus Aſſumptis igitur B & C = B + 1 ſit primus Bq ſecundus Cq & eſto tertius A. Quare Bq Cq + Bq + Cq eſt quadratus numerus ſed & Cq A + Cq + A. & Bq A + Bq + A cogitentur eſſe quadrati eſtque διπλοισότης ad A ideoque differentia Cq A - Bq A + Cq - Bq (per Lemma ad 12 lib 2) eſt gnomon. cujus longitudo eſt A + 1 & latitudo (Cq - B) harum ſemiſumma eſt $\frac{1}{2}$ A + C : ſemidifferentia $\frac{1}{2}$ A - B Quare vel $\frac{1}{2}$ Aq + C A + Cq = Cq A + A + Cq. vel $\frac{1}{4}$ Aq + B A + Bq = Bq A + Bq + A. Quare 4 Cq - 4 - 4 C - 4 = A = 4 Bq + 4 - 4 B.

XVIII. Invenire tres a, e, i ſic ut tum a e + a + e tum a + e + i tum i a + i + a ſit quadratus numerus.

Propterea quod 1. Cq : : B + 1. B Cq + Cq. ſunt B & B Cq + Cq - 1 duo numeri quibus ſi addatur 1 erunt ut 1 ad Cq nempe ut quadratus ad quadratum. Eſto igitur primus B A. ſecundus B Cq + Cq - 1 vel numerus (poſito ſi placet B 2 & Cq 4) erit primus 2 A ſecundus 8 A + 3 a e + a + e eſt 16 Aq + 16 A + 3 quadratus numerus cujus latus eſto 4 A - 2 ſic ut mulctæ quadratum majus ſit quam abſolutus 3 quare 16 Aq - 16 A + 4 = 16 Aq + 16 A + 3 vel $\frac{1}{32}$ = A. Atque hac exhibita interpretatione, primus eſt $\frac{1}{15}$: ſecundus $\frac{11}{4}$ Eſto tertius A. Eritque e i + e + i $\frac{17}{4}$ A + $\frac{13}{4}$, & i a + i + a $\frac{17}{16}$ A + $\frac{1}{16}$: Dico utrumque

que esse quadratum numerum. Namquia $\frac{17}{4} = \frac{13}{4} + 1$ sunt per præmissa ut Cq ad 1 ita Q: ad Q: ideoque uterque ducatur in A. Ducatur igitur $\frac{17}{4}$ A + $\frac{13}{4}$, & $\frac{17}{16}$ A + $\frac{13}{16}$ in duos numeros qui siut ut 1 ad Cq puta 4 ad 16 facti erunt 17 A + 13, & 17 A + 1 estque διπλοισότης: & differentia 12 = 2 x 6 quorum semisumma est 4, semidifferentia 2. Quare vel 17 A + 13 = 16 vel 17 A + 1 = 4. Estque $\frac{3}{17}$ = A tertio.

Nec dissimilis foret operatio si statueretur tertius non a purum sed a multiplex. & nota quod non necesse erat in 18 duxisse $\frac{17}{4}$ A + $\frac{13}{4}$ A & $\frac{17}{16}$ + $\frac{13}{16}$ in 4 & 16 quadratos. nec in 19 duxisse $\frac{3}{2}$ A -- $\frac{2}{5}$, & $\frac{2}{3}$ A - $\frac{1}{3}$ in 4 & 9 quadratos sed in numeros ipsis similes.

XIX. Invenire tres a, e, i sic ut tum ae-a-e tum ei -- e -- i tum ia - i - a sit quadratus numerus.

Assumptis binis quadratis numeris 4 & 9 quibuscunque, Esto primus 4 A + 1. secundus 9 A + 1 ut subducto utrinque 1 restet quadratum ae-a-e. est & 36 Aq - 1) quadratum cujus latus sit 6 A -- 1 utcunq; assumptum: 36 Aq - 12 A + 1 = 36 A -- 1 vel A = $\frac{1}{6}$. Quare primus est $\frac{5}{3}$ secundus: $\frac{5}{2}$: tertius est A.

e i -- e - i est $\frac{3}{2}$ A -- $\frac{5}{2}$ in 4 = 6 A -- 10
i a -- i -- a est $\frac{2}{3}$ A - $\frac{5}{3}$ in 9 = 6 A - 15.

quia $\frac{3}{2}$. $\frac{2}{3}$ :: 9. 4: fiat multiplicatio ipsorum

A -

$\frac{3}{2}$ A- $\frac{5}{2}$ & $\frac{2}{3}$ A - $\frac{5}{3}$ in duos numeros 4. & 9. Eritque inter factos 6 A-10 & 6 A-15, διπλοισότης differentia autem est 5 = 5 x 1 quorum laterum semisumma est 3 & semidifferentia 2 Quare 6 A-10 = 9 & 6 A-15 = 4 ideoque $\frac{19}{6}$ = A tertio.

XX. Invenire duos a, e. sic ut tum a e + a tum a e + e tum a e + a + e sit quadratus numerus.

Esto primus A, secundus 4 A-1. Quare a e + a est 4 Aq: qui est quadratus numerus. Item a e + e, 4 Aq + 3 A - 1 : & 4 Aq + 4 A - 1 debent esse quadr: numeri: Estque διπλοισότης & differentia A vel 4 A x $\frac{1}{4}$ (oportet enim assumere 4 A ut in semisummæ & semidifferentiæ quadratione habeatur 4 Aq) quadratum semisummæ est 4 Aq + $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{64}$ = 4 Aq + 4 A - 1, & quadratum semidifferentiæ 4 Aq - $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{64}$ = 4 Aq + 3 A - 1. Estque A $\frac{65}{224}$.

XXI. Invenire duos a, e, sic ut tum a e - a tum a e - e tum a e - a - e sit quadratus numerus.

Esto primus 4 A secundus A + 1: tres reliqui erunt 4 Aq: 4 Aq - 3 A - 1 4Aq-A-1 qui duo posteriores cogitantur quadra: numeri: est que διπλοισότης differentia 4 A = 4 A x 1 Eritque A = $\frac{5}{4}$.

XXII. Invenire quatuor a, e, i, o, sic ut tum Q: a + e + i + o tum Q: a + e + i + o - a: tum &c;

Propterea

Propterea quod in triangulo rectangulo Hq = Cq + Bq: & Cq + Bq + 2BC = Q:C + B & Cq + Bq - 2 CB = Q: C - B: si quærantur quatuor triangula rectangula, eandem habentia hypotenusam (hoc est siquadratus numerus dividatur quater in binos quadratos) & pro summa quatuor numerorum quæsitorum statuatur hypotenusa ducta in A, & pro numeris ipsis statuantur quatuor plana sub lateribus rectis quatuor illorum triangulorum duplicata & ducta in Aq: prodibit inter hypotenusam & quatuor illa plana duplicia æqualitas præstitura quæsitam potestatem ut si quatuor triangula sint H CB, Hcb, H$\kappa\beta$, H$\gamma\delta$. Erit HA = 2 C B Aq + 2 c b Aq + 2 κ β Aq + 2 $\gamma\delta$ Aq.

Et quidem in 8 Lib: 2 ostensum est dividere numerum quadratum datum in duos quadratos: Verum ut illud in integris fiat, hoc excogitavit artificium.

Expositis his binis quadratis 4 × 1 & 9 × 4 duo triangula rectangula in minimis terminis fabricata, 5, 4, 3, & 13, 12, 5. tum ducta in utramque alterius hypotenusam duo alia efficient, 65, 60, 25, & 65, 52, 39 deinde expositorum quadratorum summis in se ductis nempe 4 + 1 in 9 + 4 producentur quatuor quadrata proportionalia, 36 + 16 + 9 + 4. Quare (per) 65 = Q 6 + 2 + Q 4 - 3: Et. 65 = Q: 6 - 2 + Q: 4 + 3. Postremo ex horum laeribus fabricantur

tur duo triangula rectangula 65, 16, 63 & 65, 56, 33 Inventa ſunt igitur in numeris integris quatuor triangula rectangula ad eandem Hypotenuſam.

FINIS. Libri Tertii.

R DE

DE TRIANGULIS PLANIS RECTANGULIS.

I. Quia Aq.mi: Æ $=$ XA. Et Æ mi: Eq $=$ XE Erit.

I. $Aq. + B$ mi : $\AE + B = XA$. Et.

$\AE + B$ mi : $Eq + B = XA$. Et.

$\frac{Aq + B}{X} - \frac{\AE + B}{X} = A$. Et.

$\frac{\AE + B}{X} - \frac{Eq + B}{X} = E$. Et.

$\frac{Aq + B}{X} + \frac{Eq + B}{X} - \frac{2\AE + 2B}{X} = X$.

$2Z + 2Xq = 4\AE + 4Xq$.

II. Hinc licet invenire tres numeros, sic ut factus a duobus quibuslibet ex iis, minutus vel auctus dato numero (secundum signorum exigentiam) erit quadratus numerus. Tres numeri sunto $\frac{Aq + B}{X}$, $\frac{Eq + B}{X}$, & $\frac{2Aq + 2B}{X} + \frac{2Eq + 2B}{X}$ vel $4\frac{\AE + 4B}{X} + X$.

Dico

Dico 1° $\frac{Aq + B}{X}$ mi: $\frac{Eq + B}{X} + B = Q: \frac{Æ + B}{X}$

Nam $Aq + Eq - Xq = 2\,Æ$.

Dico 2° $\frac{Aq + B}{X}$ in $\frac{4\,Æ + 4\,B}{X} + X : + B = Q\,\frac{Aq + B}{X} + \frac{Æ + B}{X}$.

Nam per interpretationem ipsius A superius traditum est.

$Q: \frac{Aq + B}{X} - \frac{Æ + B}{X} : = Aq = \frac{Aq + B}{X}$ in $X + B$. At

$Q: \frac{Aq+B}{X} - \frac{Æ+B}{X}$. pl: $\frac{Aq+B}{X}$ in $\frac{4Æ+4B}{X} = Q: \frac{Aq+B}{X} + \frac{Æ+B}{X}$

Dico 3° $\frac{Eq + B}{X}$ in $\frac{4\,Æ + 4\,B}{X} + X : + B = Q: \frac{Æ + B}{X} + \frac{Eq + B}{X}$.

Nam per interpretationem ipsius E superius traditum est.

$Q\,\frac{Æ + B}{X} - \frac{Eq + B}{X} = Eq = \frac{Eq + B}{X}$ in $X + B$.

At $Q: \frac{Æ + B}{X} - \frac{Eq + B}{X}$. pl. $\frac{Eq + B}{X}$ in $\frac{4\,Æ + B}{X}$ $= Q: \frac{Æ + B}{X} + \frac{Eq + B}{X}$.

III. Ex assumptis duobus numeris A, E. procreantur tres alij numeri. Aq. & Eq. & 2 Aq. + 2 Eq. + 2 Xq vel 4 Æ + 4 Xq. sic ut factus a duobus quibusvis ex iis auctus facto ex Xq, sive per summam eorundem sive per tertium sit quadratus numerus.

Dico 1° Aq Eq pl. Aq Xq + Eq Xq = Q Æ + Xq, Nam quia Aq + Eq = 2 Æ + Xq. Erit.

Aq Xq + Eq Xq = 2 Æ Xq + Xqq. Addantur utrobique Aq Eq.

Dico 2° Aq Eq pl. 4 Æ Xq + Xqq = Q: Æ + 2 Xq. Nam Q: Æ + 2 Xq = Aq Eq + 4 Æ Xq + 4 Xqq.

Dico 3° 4 Aq Æ + 4 Aq Xq pl. Aq. Xq + 4 Æ Xq. + 4 Xqq = Q: Aq + Æ + 2 Xq.

Nam Q: Aq + Æ = 4 Aq Æ + Aq Xq quia Aq + Eq = 2 Æ + Xq. Quare Q: Aq + Æ + 2 Xq = 4 Aq Æ + Aq Xq + 4 Aq Xq + 4 Æ Xq + 4 Xqq.

Dico 4° 4 Aq Æ + 4 Aq Xq pl: Eq Xq = Q: Aq + Æ + Xq. Nam Q: Aq + Æ + Xq = 4 Aq Æ + Aq Xq + 2 Aq Xq + 2 Æ Xq + Xqq. Est Aq + Eq = 2 Æ + Xq.

Dico 5° 4 Eq Æ + 4 Eq Xq pl. Eq Xq + 4 Æ Xq + 4 Xqq = Q: Æ + Eq + 2 Xq.

Nam Q: Æ + Eq = 4 Eq Æ + Eq Xq &c. Sicut in tertio.

Dico 6° 4 Eq Æ + 4 Eq Xq pl. Aq Xq = Q: Eq + Æ + Xq. Nam Q: Æ + Eq = 4 Eq Æ + Eq. Xq. &c. sicut in 4°

IV. Ex assumptis duobus numeris A, E, procreantur tres alij numeri Aq + 2 Xq, & Eq + 2 Xq, & 2 Aq + 2 Eq + 4 Xq. vel 4 Æ + 6 Xq. Sic ut factus à duobus quibusvis ex iis minutus facto ex Xq, sive per summam eorundem sive per tertium sit quadratus numerus.

Dico

Dico 1° Aq + 2 Xq mi: Eq + 2 Xq in Xq in Aq + Eq + 4 Xq = Q: Æ + Xq, hoc est.

Aq Eq + 2 Aq Xq + 2 Eq Xq + 4 Xqq - Aq Xq -- Eq Xq - 4 Xqq = Aq Eq + 2 Eq Xq + Xqq. Nam Aq + Eq = 2 Æ + Xq.

Dico 2° Aq + 2 Xq in Eq + 2 Xq in Xq in 4 Æ + 6 Xq = Q: Æ, hoc est Aq Eq + 2 Aq Xq + 2 Eq Xq + 4 Xqq - 2 Aq Xq - 2 Eq Xq - 4 Xqq = Aq Eq.

Dico 3° Aq + 2 Xq in 4 Æ + 6 Xq in Xq in Aq + 4 Æ + 8 Xq = Q: Aq + Æ + 2 Xq. Nam Q: Aq + Æ + 2 Xq = 4 Aq Æ + Aq Xq, + 4 Aq Xq, + 4 Æ Xq + 4 Xqq.

Dico 4° Aq + 2 Xq in 4 Æ + 6 Xq in Xq Eq + 2 Xq = Q: Aq + Æ + 3 Xq, hoc est 4 Aq Æ + 6 Aq Xq + 8 Æ Xq + 12 Xqq - Eq Xq - 2 Xqq = 4 Aq Æ + Aq Xq + 6 Aq Xq + 6 Æ Xq + 9 Xqq. Nam Aq + Eq = 2 Æ + Xq.

Dico 5° Eq + 2 Xq &c: sicut in 3°.

Dico 6° Eq + 2 Xq &c: sicut in 4°.

V. Ordinatum est in cap. 18. Clau. Math. quod Q: A + E = Q: A -- E + Æ. Et Q: Aq + Eq = Q: Aq^{2} - Eq + 4 $Æq^{2}$.

At vero in triangulo rectangulo Hq = Bq + Cq: per 47 e. 1.

Assumptis igitur binis numeris A, E, triangulum rectangulum licet fabricare: hoc modo,

A, E	. Aq	. Eq.
Vel $\frac{A+E}{2}$	. √Æ	. $\frac{A-E}{2}$.

Vel

Vel Aq + Eq . 2 Æ . Aq - Eq.
Hypotenusa . Cathetus . Basis.

Et quia continuè proportionales sunt, tum A. √ Æ. E. tum Aq. Æ. Eq: triangulum rectangulum constituent trium continue proportionalium, vel medius cum mediorum semisumma atque semidifferentia: vel medius duplex cum summa atque differentia eorundem: uti in superiore exemplo liquet.

VI. In triangulo rectangulo, summa hypotenusæ & basis, cathetus, & differentia hypotenusæ & basis sunt ∺

Nam hypotenusæ & basis summa est 2 Aq: & differentia 2Eq; quare. Item hypotenusæ & catheti summa est Zq. differentia Xq. Item laterum circa rectum summa est ZA + XE: differentia ZE ∾ XA. Item laterum circa rectum & hypotenusæ summa est 2 Æ + Aq: Et differentia 2 Æ. Eq.

Invenire duos illos numeros, ex quibus triangulum rectangulum fabricatur.

Latus unius rectum hypotenusæ tum addes tum auferes: erunt semisummæ & semidifferentiæ √q, duo numeri quæsiti. ut △ 13, 12, 5, numeri fabricatores sunt $\sqrt{\frac{13+5}{2}}$ & $\sqrt{\frac{13-5}{2}}$ hoc est 3 & 2. vel etiam sunt $\sqrt{\frac{13+12}{2}}$ & $\sqrt{\frac{13-12}{2}}$.

Refer huc 13.

VII. Si

VII. Si duo numeri quadrati alios duos numeros quadratos multiplicent, uterque utrumque, quatuor facti erunt quadrati proportionales: eorumque omnium summa componitur ex quadratis summæ laterum extremorum, & differentiæ mediorum: vel ex quadratis differentiæ laterum extremorum & summæ mediorum.

Sunto quatuor quadrati factores, Cq, Dq, Fq, Gq. Ex his facti erunt Cq Fq. Cq Gq :: Dq Fq. Dq Gq. horum autem summa est vel Q: CF + DG: + Q: CG - DF: vel etiam

Q: CF - DG: + Q: CG + DF. Nam

Q: CF + DG = Cq Fq + 2 CFDG + Dq Gq.

Q: CG - DF = Cq Gq - 2 CGDF + Dq Fq.

item

Q: CF - DG = Cq Fq - 2 CFDG + Dq Gq.

Q: CG + DF = Cq Gq + 2 CGDF + Dq Fq.

VIII. Atqne hinc (& quia si trianguli latera tria ducantur in eundem numerum, fit novum triangulum simile) datis duobus triangulis rectangulis dissimibus, HCB & hcb duo alia triangula rectangula poterunt fabricari. Ex. gr.

Hqhq = Hqcq + Hqbq. =

Cqcq + Bqcq :: Cqbq + Bqbq. Quare.

Hqhq = Q: Cc + Bb: + Q: Bc - Cb.

Hqhq = Q. Cc - Bb.: + QBC + Cb.

Hypoten; Latera circa rectum angulum

Refer huc 14.

IX. Invenire

IX. Invenire tria triangula rectangula ſic ut ſolidus ſub cathetis ad ſolidum ſub baſibus ſit ut quadratus numerus ad quadratum numerum.

	H	C	B
Sunto			
tria tri-	Hq + Cq.	2 HC.	Hq-Cq = Bq
angula.	Hq + Bq.	2 HB.	Hq-Bq = Cq.

Factus à tribus cathetis eſt 4 Hq Cq in B.
Factus à tribus baſibus eſt Bq Cq in B.

Nota quod ſolidi variari poſſunt quadrifariam.

X. Invenire duo triangula rectangula, ſic ut planus ſub cathetis, minutus plano ſub baſibus conſtituat numerum quadratum, cubicum, quadrado-quadraticum, &c.

Sumantur 2 C < B ſintque

	H	C	B
Duo tri-			
angula.	4 Cq + Bq.	4 CB	4 Cq-Bq.

Hic differentia planorum ſub cathetis & baſibus eſt B c. Sed ſi trianguli poſterioris latera applicentur ad B, differentia foret Bq. Si vero multiplicentur per B foret Bqq. Si per Bq, foret Bq c. Et ſic de reliquis.

XI. Invenire duo triangula rectangula ſic ut planus ſub cathetis, auctus plano ſub baſibus, conſtituat numerum. Q: C : QQ^{um} : &c.

Sumantur B < 2 C. ſintque.

H	C	B
Bq + 4 Cq.	4BC.	Bq-4Cq.

Hic ſumma planorum ſub cathetis & baſibus eſt B c. Sed ſi trianguli poſterioris latera adplicentur ad

ad B vel ducantur in B: vel in Bq: &c. Summa foret numerus Qus vel QCus &c.

XII. Invenire tria triangula rectangula, sic ut solidus sub hypotenusis, ad solidum sub Cathetis, sit ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Inveniantur per alterutram è proxime præcedentibus, duo triangula sic ut planus sub cathetis minutus, vel etiam auctus plano sub basibus, constituat numerum quadratum. Et ex duobus illis fabricetur tertium, sumendo pro Catheto Cc-Bb vel etiam Cc+Bb & sic utrobique tiangulum tertium erit $\frac{4CqH+BqH.}{B}$ Bq. 3 $\frac{CBq+4cCq.}{B}$

XIII. Cq+Bq [Hq]+2 CB = QC+B Et Cq+Bq [Hq]-2 CB = Q: C-B.

XIV. Liquet ex 7 si duorum quadratorum summa, ducatur in summam duorum aliorum quadratorum, factus componetur bis ex binis quadratis nempe ex quadrato summæ laterum à duobus factis extremis cum quadrato differentiæ laterum à duobis factis mediis, & ex quadrato differentiæ laterum à duobus factis extremis, cum quadrato summæ laterum à duobus mediis, ut in exemplo.

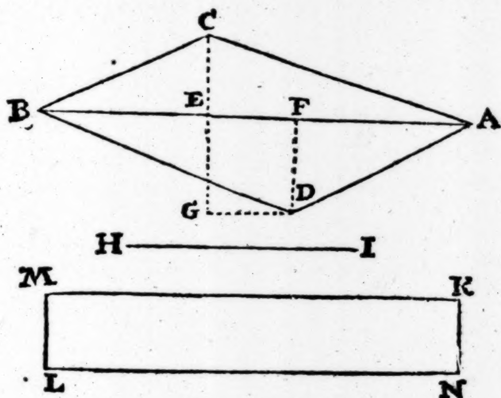
9 + 4 in 25 + 9
225 + 81 + 100 + 36 = 442
15 . 9 :: 10 . 6

Q: 15 + 6 =	441	Q: 15 - 6 =	081
Q: 10 - 9 =	001	Q: 10 + 9 =	361
	442		442

DE

DE
Divisione Superficierum.

I. COnstituere rectangulum (sive quadratum sive oblongum) æquale figuræ rectilineæ



trilateræ vel quadrilateræ, &c. Esto quadrilaterum ABCD cui æquale rectangulum constituendum est, ab angulo A in oppositum B ducta recta AB. ex reliquis angulis C & D

 demit-

demittantur perpendiculares CE & DF [1] quarum aggregatum est CG tum [2] fiant $\frac{1}{2}$AB. HI. CG ∺ quare [3] HIq. = quadrilatero ABCD si vero velis rectangulum altitudinis K L ipsi æquale. fiat, KL : $\frac{1}{2}$ AB : CG :: KM eritque [4] LM. = ABCD.

Et similiter pergendum est, si plura essent latera; instituenda enim ita est proportio ut semibasis & altitudo plani dati sint medii termini, hinc etiam poteris rectangulo alicui dato vel adjicere vel auferre portionem æqualem alteri rectilineo dato, per lineam lateri alterutri ipsius rectanguli parallelam. Nota quod in omnibns quadrangulis rectilineis ipsæ triangulorum altitudines rationem habent ipsorum triangulorum ut [5] △CBA. △DBA :: CE. DF.

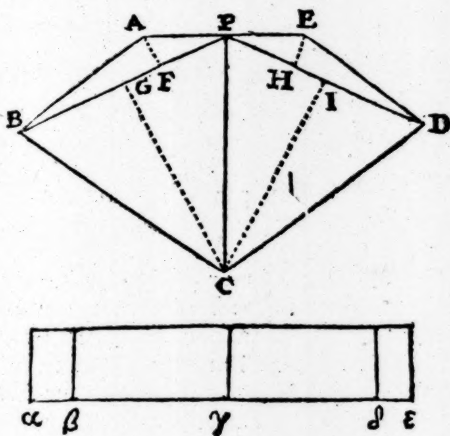
II. Diviso rectilineo aliquo in triangula lineas rectas ipsis triangulis ordine proportionales invenire. [1] Quinquangulum ABCDE. dividatur ex puncto P in quatuor triangula PAB. PBC. PCD. PDE. & in singulis demittantur perpendiculares. AF. CG. CI. EH.

Sumptaque qualibet altitudine ζ fiat. ζ : $\frac{1}{2}$ PB :: AF : $\alpha\beta$. & ζ ; $\frac{1}{2}$ PB :: CG. $\beta\gamma$. & ζ : $\frac{1}{2}$ PD :: CI : $\gamma\delta$. & ζ : $\frac{1}{2}$ PD :: EH : $\delta\epsilon$. quare linea $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ divisa est in ratione triangulorum in quinqangulo. & rectangulum totum $\zeta\epsilon$ æquale est ipsi quinquangulo.

1 34. e. 1. 2 13. e. 6. 3 17. e. 6. & Sch: 41. e. 1. 4 16. e. 6. 5 Sch. 1. e. 6.

Atque

Atque hoc modo faciendum esset, si polygonum datum dividendum foret in triangula non ex uno puncto sed prout convenientius fieri pote-

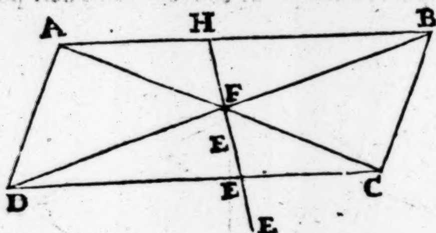


rit. quod in ejusmodi polygonis sæpenumero evenit. quæ aliquos ex angulis suis habent exterius ut inschemate quinto videre licet.

III. Parallelogrammum bisecare à quocunque puncto. Sive punctum illud extra sit sive intra parallelogrammum. Sit bisecandum ABCD. & punctum assignatum E. ductis diagoniis AC

& BD

& BD intersecantibus se invicem in F ducatur



EH [1] quæ ipsi DC parallelogrammum biseca-bit.

IV. Datum triangulum rectilineum secare quacunque ratione à puncto extra triangulum; sit triangulum ABC ex quo abscindendus est è puncto D triens. Ducatur DEA & segmentum CE majus sit ratione data ducatur DF parallela basi BC concurrens cum AC producta in F. Tum sumpto CG triente ipsius A C. Fiat ut in Schemate.

(FD : CB :: CG : CH i.e.) FD × CH = CB × CG.

Et FC : L : CH ∺ per 13 e 6.

Et ($\frac{1}{2}$ CH basis trianguli rectanguli cujus cathetus L & Hypotenusa fiat radius circuli transeuntis per I adeoque $= \frac{1}{2}$ CH + HI. Quare CI vel CH + HI : L : HI ∺ i e.)

1 26. e. 1.

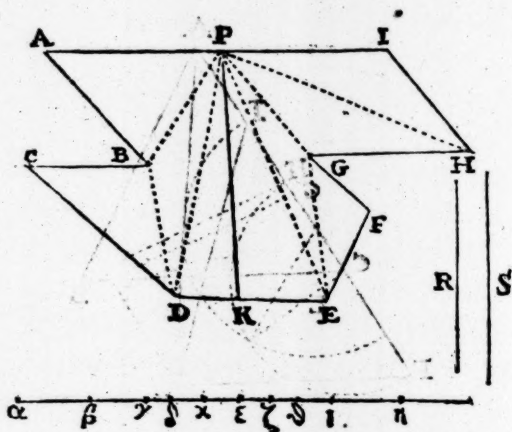
CH

CH × HI + HIq = [Lq vel] FC × CH Quare. [CH + HI i e] CI : FC :: CH : HI per 16 e 6 Ergo componendo inverse IC : CH :: [IF : IC :] FD. CK. Quare CI × CK = (CH × FD =) CB × CG. At CI × CK : CA × CB : △ICK : △ACB per 23 e 6 Ergo CG : CA :: △ICK : △ACB Atqui CG fuit $\frac{1}{3}$ CA Ergo.

Aut per 23 e 6 △ICK : △ACB :: (CI × CK . CA × CB :: CG × CB : CA × CB :: CG . CA : :) $\frac{1}{3}$ 1

V. Datum Polygonum irregulare ABCDEFGHI dividere è puncto P ratique data Rad S. diviso polygono in triangula. PAB. BCD. PBD. PDE. PEG. GEF. PGH. PHI. Ipsis triangulis inveniantur lineæ ordine proportionales. α β γ δ ε ζ κ θ

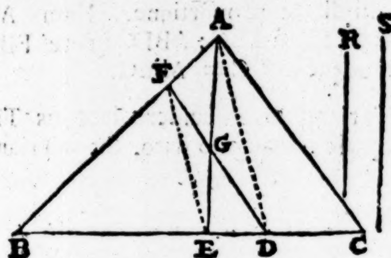
$\zeta\eta\,\theta\iota\eta$ divisa $\alpha\eta$ in κ ratione R ad S dividatur DE basis Δ^{i} PDE [cui respondet $\delta\iota$] in puncto κ ut DK : KE :: $\delta\kappa$. $\kappa\varepsilon$. ducta igitur linea PK dividetur polygonum ratione R ad S. hoc modo poteris secare polygonum in quotvis partes æquales vel inæquales.

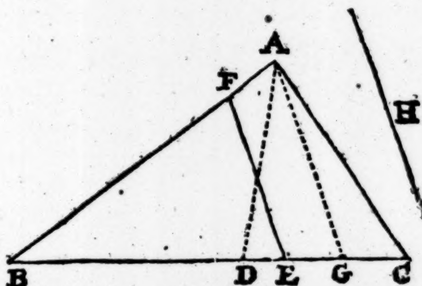


VII. Datum triangulum ex puncto dato in latere dividere in ratione data. Sit datum Δ ABC dividendum ex puncto D ratione S ad R. fiat S : R : BE : EC. ductisque ex angulo A. AD & AE & ipsi AD parallela EF. protra-

trahatur FD perquam fiet divisio postulata. est enim.[1] BE : EC :: FBD : AFDC. Nam △ AGF = DGE. ut in Schemate proximo.

VII. Datum triangulum dividere in ratione data per lineam lateri alicui parallelam: dividatur △



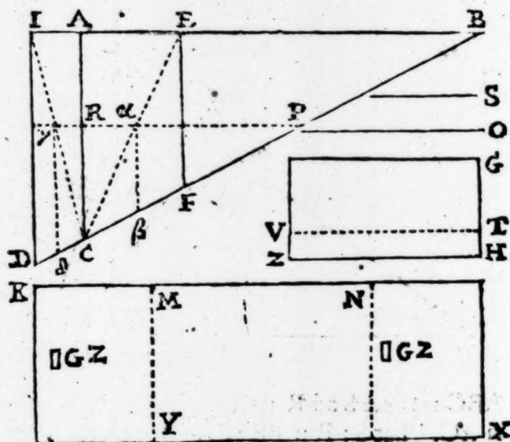


ABC ratione S ad R perlineam parallelam lateri AC.[3] fiat S : R :: BE : EC fiant etiam BE : BD. BC ∺ ductaque DF parallela lateri AC

1 1. e. 6. 2 37. e. 1. 3 13. e. 6.

erit [s] BE : EC (= BC - BE) :: FBD : AFDC (= ABC - FBD.) Si vero △ ABC dividi postuletur Ratione S ad R. per lineam parallelam rectæ H. tum fiat S : R :: BD : DC fiant etiam BD : BE : BG ∺ ductaque EF parallela ipsi AG. erit BD : DC :: FBE : AFEC. probatio pendet ex duplicata proportione. Nam ABG : FBE :: BG : BD :: ABG : ABD. quare FBE = ABD. ideoque ADC = AFEC.

VIII. E Triangulo abscindere interius Trapezium æquale rectangulo dato. Sit è Triangulo



ABC abscindendum Trapezium ACFE æquale ▯ GZ.

s 19. e. 6. Et Cor. 9. e. 5.

Con-

Constructio. fiat LX : HZ :: GH : LN.

1 ie □NX = □ GZ.

2 □ MX = △ ABC.

3 LM : O : MN ∺

4 LM : O :: BA : BE.

5 EF ∥ AC.

Demonstratio : 6 △ BAC : △ BEF :: LM : MN::

7 □ MX : □ MX - □ NX.

∵ 8 △ BAC : △ BAC-△ BEF [=ACFE] :: □ MX NX [9] [=GZ]

∵ 10 △ BAC : □ MX :: ACFE : □ GZ. ie. ACFE = □ GZ. q. e. d.

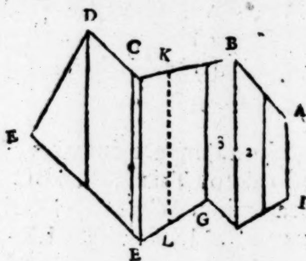
XIX. Triangulo adjungere exterius Trapezium = rectangulo dato. Triangulo ABC. adjungendum sit Trapezium ACDI = □ GZ. [1] △° ABC = constituatur □ MX fiatque [2] LX : HZ :: GH MK. fiant [3] LM : LQ : LK ∺ & [4] LM : LQ :: BA : BI. & ducatur [5] ID ∥ AC. Demons: [6] △ BAC : △ BID :: LM : LK : ∵ [8] △ BAC : ACDI :: LM : KM :: □MX : □GZ ∵ ACDI = □ GZ. q. e. d.

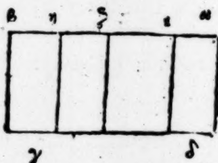
X. Quod si in Triangulo ABC. punctum concursus B non habeatur sumpto H puncto in latere CB, [3] ducatur PR ipsi AB parallela. [4] fiatque CA : CR : S ∺ & [4] CA : S :: GH : HT. ducaturque TV. quare [11] △ BAC : △ PRC : □GZ

1 25. e. 6. 2 44. e. 1. 3 13. e. 6. 4 11. e. 6. 5 31. e 1. 6 19. e. 6. 7 1. e. 6. 8 2 Cor. 19. e 5. 9 Constr. 10 16. e. 5. 11 19. 20. e. 6.

□TZ. constituatur ergo [1]CRαζ vel, [2]CRγδ æquale □TZ. & ducantur diagonii CαE & CγI & paralleli EF. & ID. &c.

XI. E Polygono rectilineo ABCDEFGHI abscindere portionem = rectangulo αγ per lineam parallelam lateri AI. diviso polygono in Trapezia, distinguatur etiam rectangulum in



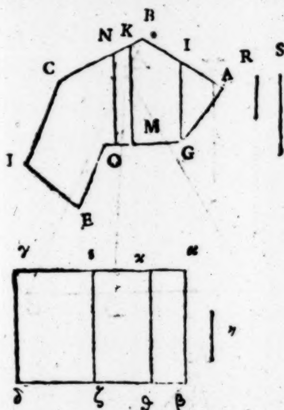


æqualia rectangula 1. 2. 3. tandem relinquatur rectangulum γη, cui ex polygono trapezium 4 æquale per 9. auferendum est. Igitur, &c.

1 9. hujus. 2 10 hujus.

XII.

XII. Quod si polygonum rectilineum ABCDEF G dividendum sit ratione. R ad S fiat rectangulum $\alpha\beta\gamma\delta$ æquale ipsi polygono & dividatur rectangulum in eadem ratione per lineam

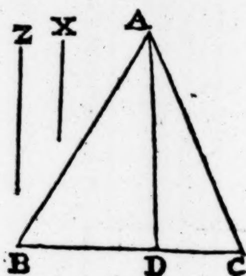


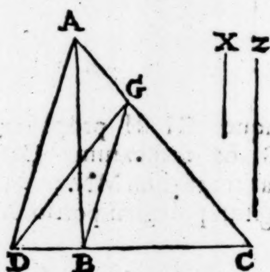
$\epsilon\zeta$. ductaque GI ‖ propositæ H fiat □ $\alpha\vartheta$ = △AIG. & trapezium GIKM = $\vartheta\iota$. postremo fiat trapezium MN. = △BKL per 9 & 10. est igitur polygoni portio ABNMG = □ $\alpha\xi$.

XIII. A puncto in ambitu rectilineæ figuræ sive in angulo sive in latere quolibet sumpto rectam lineam ducere quæ ipsam dividat in partes datam habentes proportionem.

Figuram

Figuram autem rectilineam nunc intelligo, quæ totidem lateribus quot angulis continetur. Sit △ABC. sit data proportio X ad Z. Si per lineam ab angulo dividendus est [1] partire ejus basim secundum X ad Z. se: in D. & [2] duc AD



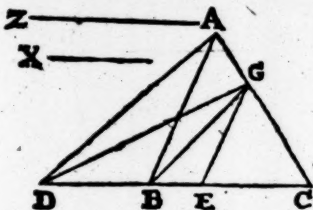


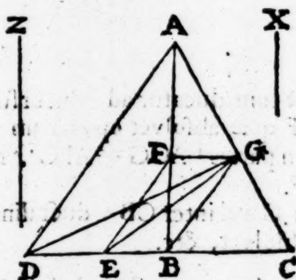
& sic de reliquis angulis & basibus. Sumatur in latere AC. puuctum G. unde dividendum est triangulum duc GB. & [3] ei ‖ AD ab A. concur-

1 10. e. 6. 2 1. post. e. 1. & 1. e. 6. 3 31. e. 1.

rat

rat CB in D. tum duc DG. ∴ ⁴ △GDC = △ dato ABC quare si ¹ divisa DC. scm X ad Z cadat divisio in B linea BG dividit sin cadat divisio inter BC in E tum ducta linea ⁵ GE problema absolvet. Sin cadat divisio inter DB in E duc



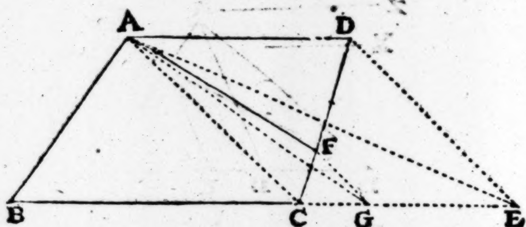


EF ∥ ipsi AD & ubi scindit AB sc. in F duc FG quæ problema absolvet nam ⁴ △ ABG = △ DBG cujus pars est DEG item ⁴ GEB = GFB. ∴ reliquæ partes. DEG = AFG.

⁵ 31. e. 6. ⁶ ax: e. 1, 1

Sit

Sit quadrangulum ABCD ex cujus angulo A dividendum est secundem X ad Z duc diametrum AC & DE ei || jungatur AE ∵ △ ABE = ABCD. Si igitur divisio cadat in G. ducatur [3] GF

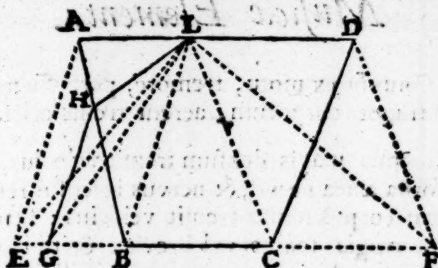


|| AC & tum ducatur ad concursum cum CD linea AF quæ absolvet opus nam △ ACE = ADC item partes [4] ACG = AFC ∵ reliquæ AGE & ADF.

Si cadat in C vel inter CB ducta linea ad A problema absolvet, &c.

Sit datum in latere punctum L & △ LEF = quadrangulo ABCD cadat divisio in G extra B duc lineam GL & a G in AB. duc [3] GH || ipsi LB tum ducatur HL quæ faciet problema nam in triangulis ALB ELB : BLH : HLA :: [5] (BH:

HA:



HA :: BG : GE ::) BLG : GLE. Sqd BL H : = BLG ∴ HLA = LEG.

Idem est si cadat divisio extra C. Sin intra BC facillimum est.

Musicæ Elementa.

I. SOnus fit ex motu, tremore, percussione, aut fragore corporum, aerem tremefaciente.

II. Corpus magis densum tremit velocius, sicut chorda ænea nervo, & nervus intensus remisso: Item corpus minus tremit velocius: sicut nervus magis tenuis vel brevis, & tibia minor propter velociorem motum aeris illisi.

III. Tremor velocior facit sonum acutiorem: tardior vero graviorem. Nam cum acumen & gravitas sint qualitates sonorum fiunt etiam à qualitatibus & magnitudinibus corporum aerem motu tremefacientium.

IV. Qualitas soni diversificatur ex qualitate materiæ, magnitudine corporis, & forma instrumenti, unde sequitur, ut ænea chorda quam nervus, & ænea tibia quam plumbea vel lignea sonet acutius. Item nervus subtilior & brevior, & fistula angustior acutiorem edat sonum. Et si densitates corporum magnitudinibus suis fuerint recipocæ, generabunt sonos unisonos.

V. Aer tremefit à nervo: Et vicissim nervus ab aere ad eundem tenorem tremente. Hinc fit ut intactæ cytharæ nervus, secundum motum nervi unisoni prope tacti tremefiat tantum.

VI. So-

VI. Sonus igitur unisonus perfectissima est symphoniarum, propter correspondentiam ictuum ejusdem numeri, estque initium omnium consonantiarum.

VII. Consonantiæ consistunt in proportionibus sive rationibus commensurabilibus, nam concordantia fit ex ictuum correspondentia. Quare impossibile est sonos incommensurabiles concordare sicut impossibile est, correspondere tremores incommensurabilium velocitatum.

VIII. Præcipui numeri generant symphonias concinniores unde post unisonum $\frac{1}{1}$, proportio dupla $\frac{2}{1}$ quæ significatur ab unitate & binario præcipuis numerorum, facit præcipuam consonantiam & perfectam, quæ Diapason & octava.

IX. Tum proportio sesquialtera $\frac{3}{2}$ significata per binarium & ternarium facit Diapente, sive Quintam, non tantæ perfectionis: Quoniam in correspondentia secatur integrum, cum unitas tardioris poscat unum cum dimidio velocioris.

X. Deinde proportio sesqui tertia $\frac{4}{3}$ consistens in ternario & quaternario facit Diatessaron sive Quartam, adhuc minus suavem, adeo ut dubium sit an consonantiis sit annumeranda. Cum ex Priscis à Ptolomæo solo admittatur.

XI. Unde conſtat, quod multiplicitas perfectiorem facit conſonantiam quam ſuperparticularitas, & præcipui numeri quam ſuccedentes. Nam ubi manifeſtior eſt ictuum correſpondentia, ibi ſymphonia conſurgit ſuavior.

XII. Diapente atque Diateſſaron differentia dicitur Tonus $\frac{9}{8}$ nam $\frac{4}{3}]\frac{3}{2}[\frac{9}{8}$ vel ſic $\frac{9}{1}\frac{8}{1}$, ratio ſegmentorum lineæ 12 eſt 9 ad 8 vel etiam ſic 3. 2. 4. 3. multiplicatis binis rationibus $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$ eo quo in Schemate 8 proponitur modo, fient tres illi numeri 12 6 continentes tres rationes $\frac{9}{6}$ ſeſquial- 9 teram, $\frac{8}{6}$ ſeſquitertiam & $\frac{9}{8}$ ſeſquioctavam, quæ illæ duæ priores differunt atque idcirco eſt Tonus.

XIII. Ditonus eſt ratio $\frac{9}{8}$ duplicata nempe $\frac{81}{64}$ diciturque tertia, eſtque $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8}$ vel invenitur ſicut in Schemate 9. 8. 9. 8. Tertia & ſexta ſunt conſo- 81 72 64 nantiæ imperfectæ.

XIV. Diateſſaron & Ditoni, vel etiam Diapente & Tritoni differentia minor eſt quam dimidium Toni, quod intervallum Dieſis dicitur. Etque ratio $\frac{256}{243}$ Nam $\frac{81}{64}]\frac{4}{3}[\frac{256}{243}$ Item $\frac{729}{512}]\frac{3}{2}[\frac{256}{243}$.

XV. Reliqua Toni pars dicitur Apotome. Eſtque ratio $\frac{2187}{2048}$ nempe $\frac{256}{243}]\frac{9}{8}$.

XVI. Apo-

pertinet hæc Tabula [illegible] pag: 175.

*Tabella continens munitionum regularium à Quadrato ad XII*gonum *laterum & angulorum amplitudines : Sed diligentius examinanda juxta regulas jam antè traditas.* } Belgicè

	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Semid: Polyg: CA	353	459	648	749	846	947	1048	1151	1400
Latus, Polyg: AB.	500	540	648	648	648	648	648	648	720
Cathet: Polyg: CN	250	372	561	673	783	890	997	1107	1343
Collum AG	100	120	144	144	144	144	144	144	160
Alæ GE, DF	80	90	90	108	108	108	108	108	120
Cortina GF	300	300	360	360	560	360	360	360	400
Alæ Cortinæ GH, LF		23	63	85	99	128	148	163	193
Capitalis AI	207	209	234	225	219	224	229	231	259
Faciei IE	256	255	279	260	247	244	242	239	261
Lin : defens: IL	565	546	594	555	529	499	479	463	501
Anguli.									
Centri ACB	90°	72°	60°	51°, 26	45° 00'	40°	36°	32° 44'	30°
Figur: polygæ. ∠ BAC	90	108	120	128 34	135 00	140	144	147 16	150
Propugnacnli ∠ AIE	60	72	80	85 43	90 00	90	90	90 00	90
Defendens lin: GLE	15	18	20	21 26	22 30	25	27	28 36	30
Alæ & faciei IEG	105	108	110	111 26	112 30	115	117	118 38	120
Capital: & lat: IAF	135	126	120	115 43	112,30	110	108	106 22	105
Defensionis EMD	150	144	140	137 09	135 00	130	126	122 44	120

∴ 180 -- 2 AIE -- ELG Ang: BAC - AIE = GLE + 90.

Ad Pag. 175

Tabellà continens munitionum regula
drato ad XII^gonum *laterum & a*
plitudines : Sed diligentius exan
regulas jam antè traditas.

	IV	V	VI	V II	VII
Semid: Polyg: CA	353	459	648	749	846
Latus, Polyg: AB.	500	540	648	648	648
Cathet: Polyg: CN	250	372	561	673	783
Collum AG	100	120	144	144	144
Alæ GE, DF	80	90	90	108	108
Cortina GF	300	300	360	360	560
Alæ Cortinæ GH, LF		23	63	85	99
Capitalis AI	207	209	234	225	219
Faciei IE	256	255	279	260	247
Lin : defens: IL	565	546	594	555	529
Anguli.					
Centri ACB	90°	72°	60°	51°, 26	45°
Figur:polygæ. ∠ BAC	90	108	120	128 34	135
Propugnacnli ∠ AIE	60	72	80	85 43	90
Defendens lin: GLE	15	18	20	21 26	22
Alæ & faciei IEG	105	108	110	111 26	112
Capital: & lat: IAF	135	126	120	115 43	112,
Defensionis EMD	150	144	140	137 09	135

∴ 180 -- 2 AIE -- ELG An

pertinet hæc Tabula
[illegible] pag: 175.

gularium à Qua-
& angulorum am- Belgicè
examinanda juxta

VIII	IX	X	XI	XII
846	947	1048	1151	1400
648	648	648	648	720
783	890	997	1107	1343
144	144	144	144	160
108	108	108	108	120
560	360	360	360	400
99	128	148	163	193
219	224	229	231	259
247	244	242	239	261
529	499	479	463	501

45° 00'	40°	36°	32° 44'	30°
135 00	140	144	147 16	150
90 00	90	90	90 00	90
22 30	25	27	28 36	30
112 30	115	117	118 38	120
112 30	110	108	106 22	105
135 00	130	126	122 44	120

.G Ang : BAC - AIE = GLE + 90.

Ad Pag. 175

XVI. Apotomes & Diesios differentia dicitur comma: Estque ratio $\frac{531441}{524288}$ nempe $\frac{256}{243}$] $\frac{2187}{2048}$ neque enim Tonus per æqualia potest dividi; nam cum ipsius termini 9 & 8 non sint ut quadratus numerus ad quadratum numerum medium proportionalem, qui proportionem per æqualia secet non habebunt.

XVII. Eorum, quæ jam definita sunt, computatio. tam numerosa tam speciosa per literas, positis A pro 3, Aq pro 9, E pro 2, Ec pro 8. sic se habet.

Diapente $\frac{3}{2}$. $\frac{A}{E}$ Diatessaron $\frac{4}{3}$. $\frac{E2}{A}$

Tonus $\frac{9}{8}$. $\frac{4}{3}$] $\frac{3}{2}$ [Diapente. [Diatessar.

$\frac{E2}{A}$] $\frac{A}{E}$[$\frac{A2}{E3}$

Diapason $\frac{2}{1}$. $\frac{4}{3}$ in $\frac{3}{2}$ $\frac{\text{Diapente.}}{\text{in Diatess.}}$

$\frac{E^2}{A}$. in $\frac{A}{E}$. $\frac{E^2}{E}$

Ditonus $\frac{81}{64}$. $\frac{9}{8}$ × $\frac{9}{8}$ $\frac{\text{Tonus in}}{\text{Tonum.}}$

$\frac{A2}{E3}$. in $\frac{A2}{E3}$. $\frac{A4}{E6}$

Tritonus $\frac{729}{512}$. $\frac{81}{64}$ × $\frac{9}{8}$ - $\frac{\text{Ditonus in}}{\text{Tonum.}}$

$\frac{A4}{E6}$ × $\frac{A2}{E3}$ $\frac{A6}{E9}$

Diesis

Diesis $\frac{256}{243}$. $\frac{81}{64}$] $\frac{4}{3}$ [Diatessar
Ditonus.

A4] E2 [E8
E6] A [A5

Vel

Diesis $\frac{256}{243}$: $\frac{729}{512}$] $\frac{3}{2}$ [·Diapente
[Tritonus.

A6] A [E8
E9] E [A5

Apotome $\frac{2187}{2048}$ · $\frac{256}{243}$] $\frac{9}{8}$ [·Tonus
[Diesis.

E8] A2 [A7
A5] E3 [E11

Comma $\frac{531441}{524288}$ - $\frac{256}{243}$] $\frac{2187}{2048}$ [·Apotom:
[Diesis.

E8] A7 [A12
A5] E11 [E19

XVIII. Diapente cum Diatessaron continuata constituit Diapason nam $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$ est $\frac{2}{1}$ quæ etiam constat ex quinque Tonis & binis Diesibus.

XIX. Diesis major est quam tria commata, minor quam quatuor hoc est ratio $\frac{256}{243}$ major est quam ratio $\frac{531441}{524288}$ triplicata, minor quam eadem quadruplicata.

XX. Apotome major est quam quatuor commata minor quam quinque h, e, Ratio $\frac{2187}{2048}$ major est quam Ratio $\frac{531441}{524288}$ quadruplicata minor quam eadem quintuplicata.

XXI.

XXI. Tonus eſt major quam octo commata, minor quam novem, hoc eſt Ratio $\frac{9}{8}$ major eſt quam ratio $\frac{531441}{524288}$ octuplata minor quam eadem noncuplata.

Hæ intervallorum collationes quamvis ſint veræ non tamen ex calculo Boetii, 3 Arithmeticæ, per differentias æquales conſequuntur: nec quidem tenent in aſcenſione naturali ab imo ſive è chorda longiore gravioreque in breviorem atque acutiorem, ut in hoc ſubjecto calculo planiſſime patet.

	8888888888 ... 1111111111 Quan. toni	01213	dif. com.
Comma			
	9010162335 ... 0121273447 dif. com.	09704	octupla.
Apotome			
	9492187500 ... 0603298611 dif. Apo.	10917	noncu.
Dieſis			
	10000000000 ... 0507812500 dif. Dies.		

XXII. Toni ſeu Tropi, vel modi octo canendi, ſunt totidem intervallorum Diapaſon ſpecies, ſecundum diverſa exordia, uſumque nationum ſumptæ, nempe Dorius, Hypodorius, Phrygius, Hypophrygius, Lydius, Hypolydius, Mixolydius, Hypomixolydius. Duo autem tetrachorda conficiunt has ſeptem chordas habentia communem terminum in chorda media: In chordis ſuperioribus tetrachordi locantur quatuor modi qui dicuntur duces, Authentici ac præcipui Dorius, Phrygius, Lydius, Mixolydius: in chordis inferioris tetrachordi, ponuntur reliqui quatuor Modi, Subjugales, Plagales & Secundarii, Hypophrygius, Hypoly-

Octo

Octo modorum sive modulaminum ratio & ordo.

Tetrachor. infr. Tetrach. Supr-
Plagal subjug. Authen. : Duces.

Chordarum ordo.			Chordarum nomina.	Septuplex varietas Positionum chordarum.	Modorum nomina.	Chordarum ratio.
	b□	tonus				
Septimus	f	tonus	Nete Infer :	in tritono	Mixolydius	6
Quintus		tonus	Paranete Super dies :	altam	Lydius	$6\frac{1}{4}$
Tertius	e	diesis	Paranete infra dies :	altam	Phrygius	$7\frac{1}{9}$
		tonus				
Primus.					Dorius	
	d		Mese media	in ditono	Hypomixolydius	8
Octavus						
Sextus	c	tonus	Lichanos Super dies :	imam	Hypolydius	9
Quartus	b□	diesis	Parhypate infra dies :	imam	Hypophry :	$9\frac{11}{27}$
Secundus	a	tonus	Hypate Superior	in triton :	Hypodorius	$10\frac{2}{3}$
	g	tonus	Proslambanomenos *			12
	F	tonus				

dius

dius, Hypomixolydius singuli singulis authenticis per Diatessaron subjacentes. Ita ut media chorda apud d suscipiat Dorium Authenticum Hypodorii infimi apud a & Hypomixolydium subjugalem supremi mixolydii apud g. Modorum dispositio imitatur ordinem planetarum in diebus Hebdomadæ nomen & dominium habentium. Formantur autem authentici a loco proprio ascendendo per Diapente & Diatessaron h: e: per Diapason; & inde tantundem descendendo. Plagales autem a sede sui quisque authentici per Diapente ascendunt & inde per Diapente ac Diatessaron descendunt: unde rursus per Diatessaron ascendunt, & in locum authenticorum simul desinunt. Miscentur tamen quandoque & aut deficiunt aut limites prætereunt ut artificibus placet.

XXIII. Quod autem Ptolomæus Hypomixolydium apud sequentem literam a, quæ octava est ab a infima: non videtur additio sed translatio Hypodorii ad eandem literam, eandemque positionem chordæ superioris in tritono, quæ translatio fieri potest in unoquoque modo: si sursum per Diapason transferatur ad eandem sc. literam.

XXIV. Ex his quæ jam tradita sunt, liquet quod naturalis cantus non per anfractus incognitasque proportiones, sed per intervalla ex præcipuis numeris propagata procedit, id est per Tonum, ac Diesin ascendens invenit Diatessaron

 tessaron

tessaron: percussoque alio Tono, Diapente terminat, adhuc per Tonum Diesim & Tonum quæ est alia Diatessaron Diapason totumque octochordum perficiat. Hic ergo vocatur legitimus & à natura constitutus ordo vocum, sicut ratio dictat ideoque etiam vocatur Diatonicus, quia per Tonos & semitonia procedit. Qui processus iterum atque iterum & deinceps infinities repetitus, ita binos Tonos & singulas Dieses admittit: triplicato inter repetendum tono; ut octavo quoque loco habeatur Diapason.

XXV. Admissio autem triplicati Toni, etsi ad perficiendum ubique Diapason necessaria, dura tamen fuit canentibus, unde ad talem duritiem temperandam, Artifices divisere tertium illum Tonum in semitonia: Itaque ablata ex tertio tono Diesi, relinquitur Apotome, atque ita recipiuntur immediate tria semitonia. Hæc divisio Toni in Diesim & Apotomen per singulos etiam Tonos fieri potest, sicut in cythara cæterisque instrumentis Musicis fieri consuevit.

XXVI. His notatis, patet quod sicut naturalis cantus (sive Diatonicus) procedit per binos tonos & singulas Dieses: ita Tritonicus per tritonos, & Chromaticus per semitonia suavior. Quæ tria sunt cantilenarum genera. Chromaticum igitur genus mollius est cum (tertio tono in Diesim & Apotomen diviso) continuantur tria semitonia.

XXVII.

XXVII. Icoſichordon Guidonis conſtat quatuordecim tonis: & quinque Dieſibus inter Ditonum ac Tritonum alternatim interjectis. Hoc autem conficiunt ſeptem hexachorda, ſingula ſc. per ſyllabas ſenas Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La, pronuntiata, ſeptenis repetitis literis & octavo quoque loco repetita eadem litera Diapaſon indicet. Jam ex ſeptem illis hexachordis primum quartum & ſeptimum incipiens apud g conſonantem duram, quoniam admittit tritonum, ex tali duritie, b□ quadrati durique nomen ſortitur. Secundum autem ac quintum, incipiens apud c mediam, quoniam per binos Tonos, ſingulaſque Dieſes legitime ac naturaliter procedit, vocatur Diatonicum, Tertium vero ac ſextum incipiens apud f aſpiratam, quoniam tertium tritoni tonum in Dieſim & Apotomen ad temperandam duritiem, partitur, ab ipſo b rotundo mollique nomen accepit. Item B litera eadem recepit Fa hexachordi mollis, & Mi hexachordi duri; ut tranſitus hic vitaretur a cantoribus, quod eſt intervallum Apotomes. At idcirco diverſificat figuram apud fa. b, rotundi, ut denotet facilitatem Chromaticam apud Mi b□ quadrati, ad ſignificandem tritonici generis duritiem.

XXVIII. Diviſio Toni in Dieſim & Apotomen in ſingulis Tonis, ſicut à peritiſſimis artificibus, & inſtrumentis fieri ſolet.

	gs	50000000000		
Apotome				
		533935546875	26696777	133484
Diesis				
	F	5625	28125	140625
Diesis				
	E	592592592592	29629630	148148
Apotome				
		6328125	31640625	158203
Diesis				
	D	66666666666667	33333333	166667
Apotome				
		7119140625	35595703	177979
Diesis				
	C	75	375	1875
Diesis				
	b□	790123456790	39506173	197530
Apotome B.				
	b	84375	421875	210937
Diesis				
	A	88888888889	44444444	222222
Apotome				
		94921875	47460937	237305
Diesis				
	G	100000000000	50000000	250000

XXIX.

XXIX. Hexachordum comprehendit simplices symphonias, sc. unisonum, ditonum, diatessaron, diapente, hexachordum: h, e. Unisonum, tertiam, quartam, quintam, sextam. Hinc ratio hexasyllabici contextus. Diapason atque Disdiapason, his singulis continuata, generat compositas symphonias ejusdem qualitatis in ordine secundo atque tertio, &c.

9]8[88888888 889. pro Tono.
256]243[94921875 000. pro Diesi.
2187]2048[93644261 546. pro Apotome.
531441]524288]98654036 8545. pro Commate.

Icosi-

Icosichordum Guidonis.

148148	e	la	
166667	d	la Sol	tonus
187500	c	Sol fa	tonus
197530	b[]	mi	diesis
210937	b	fa	tonus
222222	a	la mi re	
250000	+g	Sol re ut	tonus
281250	f	fa ut Trito.	tonus
296296	-e	la mi Chroma.	diesis
333333	d	la Sol re	tonus
375000	+c	Sol fa ut	tonus
395062	b[]	mi	diesis
421875	b	fa	tonus
444444	a	la mi re	
500000	g	Sol re ut	tonus
562500	+f	fa ut Triton	tonus
592593	e	la mi Chromaticum	diesis
666667	-d	Sol re	tonus
750000	c	fa ut	tonus
790123	b[]	mi Diatonicum	diesis
843750	b		tonus
888889	-a	re	tonus
100000	g	ut Tritonicum	tonus

Pracep-

Præcepta contexendi symphonias duarum aut plurium vocum.

I. Principia modulaminum debent exordium sumere à consonantiis perfectis quod non est necessarium.

II. Duæ perfectæ ejusdem speciei consonantiæ non debent simul ascendendo vel descendendo immediatæ poni.

III. Inter duas perfectas ejusdem generis consonantias diversis vel consimilibus motibus intensas aut remissas, una imperfecta, ut tertia vel sexta debet media constitui.

IV. Plures perfectæ & dissimiles consonantiæ ascendentes possunt constitui: ut quinta post unisonum octava post quintam.

V. Duæ perfectæ concordantiæ similes possunt immediate poni modo dissimilibus procedant motibus, ut si octava in acutam elevetur, altera acuta in grave remittatur, &c.

VI. Cantus, Tenor & gravis debent invicem esse contrarii in motu, ut si cantus ascendat tenor descendat: & contra sed id non est necessarium.

VII. Cantus & Tenor per contrarios motus suavissime transeunt ex sexta in octavam: ex unisono in tertiam & contra. Item è sexta minore

nore in quintam alterius partis mota, reliquâ ſtante; idemque de compoſitis intellige.

VIII. Cantilena in conſonantiam perfectam terminari debet.

IX. Diſcordantia in minimis notis poteſt concedi.

X. Tres voces quarum extrema per Diapaſon, media cum graviore per Diapente, cum acutiore per Diateſſaron ligantur, optime concordant ſicut & ab iis compoſitæ.

XI. Tetiarum aut decimarum ſimul aſcendentium aut deſcendentium jucundus eſt ac ſuavis proceſſus.

Tabula

Tabella proportiones Tonorum in tribus octavis comprehendens.

8]4]E	1200	e	600	e	300
F	1125	f	563	f	282
F ♯	1062	f ♯	532	f♯	266
+G	1000	g	500	g	251
G ♯	950	g♯	475	g♯	237
A	900	a	450	a	225
B fa	850	b fa	425	b fa	212
B mi	800	b mi	400	b mi	200
C	750	c	375	c	188
C♯	707	c♯	352	c♯	177
D	666	d	333	d	167
D♯	634	d♯	316	d♯	158

è 150 &c.

Numeri isti Mediani non sunt veri: Tibiæ cujus diameter est 9, longitudo 15, æqualem efficere, cujus diameter sit 5. Dic reciprocè.

Q: 5. Q: 9 :: 15. 48 $\underline{6}$ long:

Si vero quæratur longitudo tibiæ quæ sit ⅔ prioris: Primo inveniatur longitudo tibiæ æqualis, ipsaque per ⅔ multiplicetur.

Musicalium Tonorum proportionem invenire in Cythara vel Testudine.

Dividatur linea juxta Tabellam superiorem in Tonos E, F, F ♮, + G, G ♮, A, B fa, &c. ſumptoque centro in initio ejuſdem lineæ per ſingulos tonos duc arcus, tum cape circino di-diſtantiam à ſuſtentaculo ad oram cui innituntur chordæ: & ſi Cythara ſit, diſtantiam illam in ultimo arcu ab E tono nota; ſi teſtudo ſit, in arcu quarto à fine à G tono, cui præfigitur +, ad finem è centro ducatur altera linea interſecans omnes arcus. Nam arcuum ab ipſo E vel G verſus centrum, inter duas illas lineas interceptorum ſubtenſæ dabunt juſtam tonorum a ſuſtentaculo diſtantiam, verum in teſtudine toni verſus partem ſuperiorem in manubrio paululum ſunt attollendi, idque propter chordarum, quæ tonos determinant, craſſitiem.

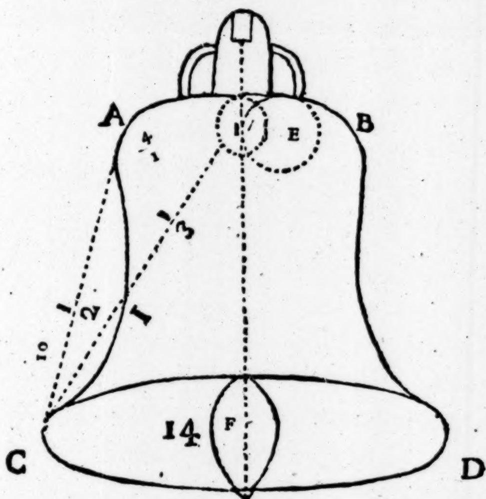
In Organis-Pneumaticis.

Omnes Organorum Pneumaticorum tibiæ conſtruuntur forma cylindri: pars enim illa quæ eſt a ſummitate uſque ad inferius foraminis labium, Cylindracea eſt, tonumque exprimit. Quare partes illæ ſecundum lineæ ſuperius diviſæ proportiones augendæ vel minuendæ erunt. Ut data tibia velim conſtruere aliam, quæ ipſa inferior ſit tonis 5. Quia quintus tonus differt a primo in proportione 800 ad

1200: ideo incipiendo ab inferiore foraminis labio, tibia desiderata prioris sesquialtera conficienda est.

In Campanis.

Detur Campana ABCD cui velim ut alia similis tono quarto inferior fiat: divisa linea juxta tabellam superiorem in tonos, ducantur



duo arcus, unus per E alter per A, in quo metieris circino subtensas æquales distantiis

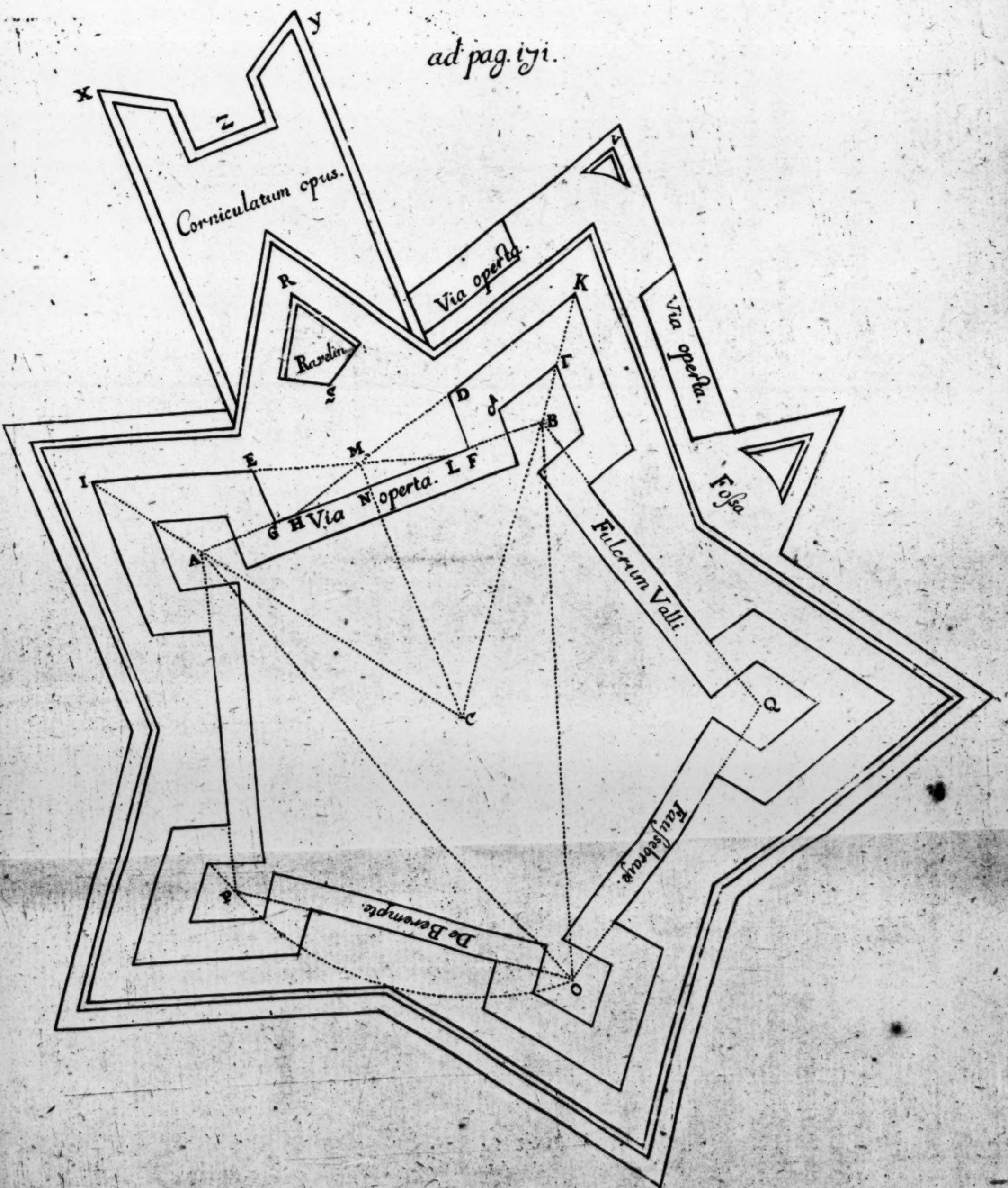
 CD,

CD, AB, AC,EF: tum e centro duces lineas totidem interſecantes reliquum arcum: & ſic habes dimenſiones Campanæ fabricandæ.

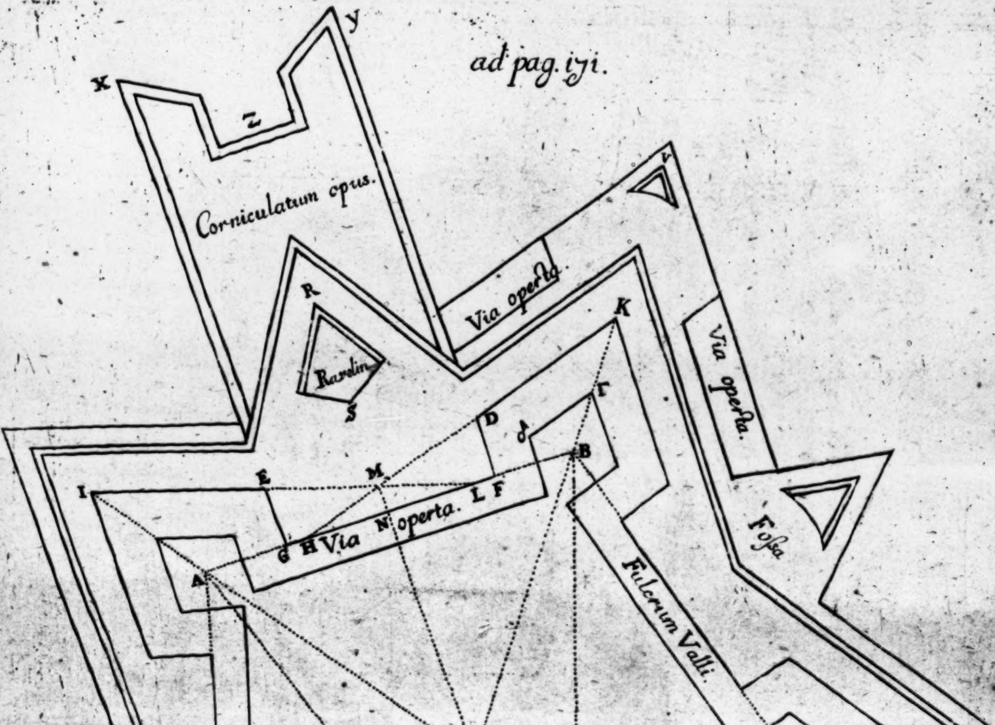
Nota quod Campana bene formata debet habere diametrum orificii 14 & latitudinem ſuperiorem AB 7: Et altitudinem interiorem EF 10, & altitudinem exteriorem AC 10 $\frac{1}{2}$ Et Craſſitiem juxta C 1 in ſummitate $\frac{1}{4}$ in medio $\frac{1}{3}$.

Pro-

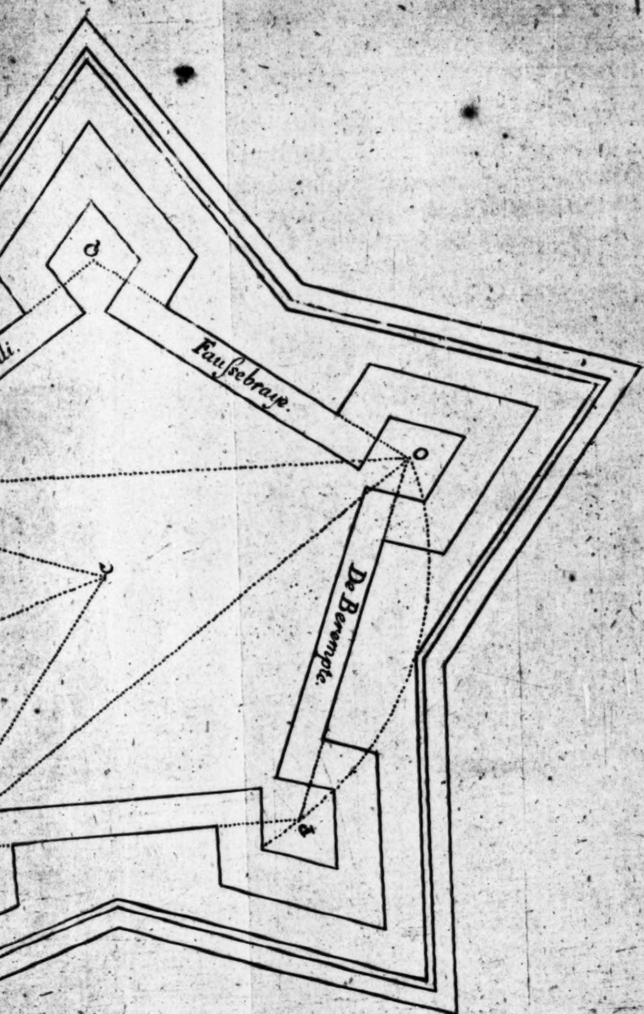
ad pag. 171.



Corniculatum opus.
Via operta.
Via operta.
Ravelin
Fossa
Via operta.
Fulcrum Valli.
Faussebraye.
De Berempte.
X
Y
Z
V
R
S
K
Γ
D
δ
B
E
M
I
L
F
G
H
N
A
C
Q
P
O



ad pag. 171.
X
Y
Z
Corniculatum opus.
R
Ravelin
S
V
Via operta.
Via operta.
K
Γ
D
δ
B
I
E
M
L F
G H Via N operta.
A
Fulcrum Valli.
Fossa



li.
Faussebraye.
De Beremple.

F

I

al
ſti

E

S

DE

Propugnaculorum Munitionibus.

MUnitio quantum loci commoditas tulerit debet esse ordinata quo capacior sit ad recipienda militum tuguria, commeatus, aliasque res tum militibus sustentandis, tum hostibus arcendis necessarias.

Exemplum sumatur in figura pentagona. Dividatur 360 gradus per 5, qui numerus est laterum, quotus erit 72 gradus, pro angulo ad centrum ACB. Angulum hunc tolle ex 180. Reliquus erit angulus figuræ BAP 108 gradus hujus dimidium est angulus BAC 54 gradus.

180
Exempl : 5) 360 (072 = < ad centr :
2) 108 = < figuræ
54 Semis.

480
Sumatur latus figuræ AB non minus quam 400
380

780 650
pedes, nec majus quam 680, puta 540 : Erit
600 530

325
AN 270 pedes. In triangulo igitur rectangulo

lo NAC, datis angulo ACN 36 grad: & basse AN; datur Hypotenusâ AC 459 3516 pedes; & Cathetus CN 371 5231 pedes.

In pentagona arce ½ ang. ACB = ACN = 36.
Ang CAN = 54 grad. ang. figuræ
SCo. CAN. Rad :: AN. AC :: S. ACN. Rad.
Rad. S. CAN :: AC. CN.

Tum stante astrolabio in Centro C (qui locus eligitur accomodatissimus pro medio arcis extruendæ) fiant quinque rectæ longæ 459 3516 pedes & continentes angulos 72 graduum. Et per terminos ipsarum rectarum, ductæ lineæ includent in campo pentagonum BAPOQ. Hoc pentagonum etiam examinabis, posito astrolabio in angulo O: Nam si trium angulorum æqualium ipsi ACN latera incidant in puncta BAPQ, recte descriptum est pentagonum pro munitione facienda. At quo tutior sit ista munitio ab hostium incursu, munitionibus communienda est hac arte.

In latere pentagoni AB abscindatur utrinque linea *colli AG & BF, quæ sit* $\frac{2}{9}$ *lateris*, nempe 120 pedes. Medium spacium inter GF quod est $\frac{5}{9}$ lateris, vel 300 pedes erit pro cortina.

At in quadrato latus est ad lineam colli ut 5 ad 1 & ad cortinam ut 5 ad 3 vel $\frac{1}{10}$ in []° vel $\frac{1}{5}$ in pentagono. &c.

In

In punctis G & F exceant ad angulos rectos *GE DF tali æquales* $\frac{1}{6}$ *lateris* nempe 90 pedum, At in quadrato $\frac{4}{25}$ lateris.

E punctis DE ducantur rectæ DH,EL, sic ut angulus defensionis interior DHF & ELG sit triens ang^i BAC (sextans ang BAP) nempe 18 grad: & angulus ad D vel E ejusdem complementum nempe 72 grad: extendantur rectæ LE & HD donec concurrant cum lineis è centro GA & CB productis in I & K. Erit angulus EIA & DKB bes anguli BAC nempe grad: 36. Nam hæc regula est generalis, quod angulus propugnaculi 2EIA continere debet $\frac{2}{3}$ anguli polygoni 2 BAC, modo non excedat 90 gradus (quod primo fit in nonangulo) At vero in Nonangulo & reliquis plurium laterum figuris angulus propugnaculi 2 EIA semper debet esse rectus item angulus polygoni 2 BAC est ad angulum defensionis interiorem ELG usque ad octogonum ut 6 ad 1. post octogonum ratio paulatim decrescit ita ut in dodecagono sit ut 5 ad 1.

Ang: CAN - AIE = GLE. Ang: GEL = compl: GLE.

In octangula arce angulus propugnaculi est 90.

In Enneagono quidem ut 28 ad 5. In decagono ut 16 ad 3. In Hendecagono ut 26 ad 5.

In

In triangulo rectangulo plano EGL datis angulis cum latere EG, inveniatur basis GL pedes 27 9915 & Hypotenusa EL 291 2461 est igitur AL 396 9915.

Rad. t. GEL :: EG. GL.
S. GLE. Rad :: EG. EL.

In triangulo IAL datis tribus angulis cum latere AL inveniatur latus AI 208 7108 & IL 546 1941 pedes; est igitur IE facies propugnaculi 255 1658.

In triangulo AIL, datur GL & AG = $\frac{2}{9}$ lateris.
Quare Dic. SI. AL :: SA. IL :: SL. IA.

In triangulo rectangulo LMN, datis anglis MLN 18 grad: & LMN 72 grad. & base LN 126 9915 pedes invenietur hypotenusa LM 133 5265: & cathetus MN 41 2620 quæ est distantia puncti defensionis M a medio cortinæ.

In triang: MNL, datur ang: L & NL = GL -GN ($\frac{1}{18}$ lat)
Dic S.co. L. NL :: Rad. ML :: S,L. MN.

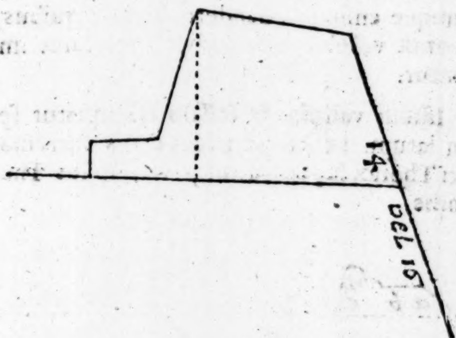
Tabula

Vallum in Quadrato & Pentagono altum sit 14 pedes.

In Hexagono & heptagono 16 pedes.

Reclinatio valli exterior ad altitudinem esto ut 2 ad 3; verum si terra congesta sit lenta tenaxque poterit esse ut 1 ad 2: Reclinatio valli interior ad altitudinem esto ut 3 ad 2 ferè.

Alt: Recl: :: 3. 2 vel 2. 1 exterior.



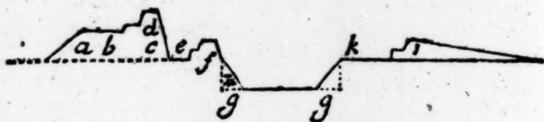
Alt: Recl: :: 2. 3 vel 1. 2 Inter. ped. 30 ad 60.

Verticalis latitudo valli ad minimum esto 30 pedum nec unquam excedat 60 pedes.

Thorax vallo superstructa *habeat exterius altitudinem* 4 *pedum, Reclinationem* 2 *pedum, at vero interius altitudinem habeat* 6 *pedum & Reclinationem* 1 *pedis & latitudinem verticalem* 9 *vel* 12 *pedum.* Huic *scabellum adjicitur altum* 1 *& latum* 2 ½ pedis.

Equites sive Cavallieri sunt colliculi qui nonnunquam excitantur inter duo propugnacula, vel ad angulum interioris polygoni, qui super summum Thoracem eminent 5, 6 vel 7 pedes, ut eo commodius in campum prospicere hostemque eminus offendere liceat: quibus vel Thorax vel ejus loco corbes loricolares imponuntur.

Inter Imum vallum & fossam relinquatur spatium latum. 12 18 22 pedes cujus extremo littori Thorax superstruitur, valli ipsius Thoraci similis.



a b c Vallum.

a interior valli inclinatio Gall: Scharpe Ital: Scharpa.

c Exte-

c Exterior inclinatio Ital contras Scharpa, fiorischarpa.
b Craſſities quadrang: valli.
d Thorax cum Scabello Gall: cortine Ital: parapetto.
ef. Fauſſebraye Belg de berempte fulcrum valli.
e K viæ opertæ.
f Thorax parapetto.
14 Foſſæ profunditas.
Kl contre Scharpe.
L Thorax.

Foſſa circa totam munitionem excavetur, cujus in locis arenoſis & editioribus fundum æquetur verticali valli: ſuperficies ſive ſumma latitudo baſi, profunditas altitudini: inclinatio interior exteriori: exterior interiori: at in locis ſcaturiginoſis, petroſis vel declivioribus, ubi ad profunditatem 6, 8 vel 10 pedum effodiatur, riparum diſtantia ſit 160 & 180 pedum & conveniens profunditati inclinatio. Et ne primus hoſtium inſultus qui ſolet eſſe ferociſſimus huic machinæ ſoli incumberet, ſagaces homines, varias, quæ & ipſam munitionem communire poſſent, excogitaverunt munimentorum formas ab ipſo quidem opere ſejunctas, tutas tamen ſub alis propugnaculorum latentes, unde & hoſtem ferire, & à ſuis auxilium ferri commode poſſet; ſunt autem hujuſmodi,

Parmularum fabrica hæc est { *Ital*: *Bastinetto.* / *Gal*: *Ravelins.* }

Ex medio cortinæ N perpendicularis excitetur & ex puncto ipsius R binæ facies egrediantur, pro ratione polygoni ab 144 ad 200 pedes: quarum defendentes lineæ medietati alæ polygoni respondeant: aut si non feret occasio, distent ab alarum angulis 12 aut 20 ped: Parmulæque interior angulus S respondeat interiori fossæ: cui munimento fossa 50 aut 60 ped: lata circumducta.

De Thorace contrescharpe dicto.

In opposita campi planite, spatio 24 ped: (quam viam opertam nuncupare solemus) assumpto Thorax excitatur, cujus latera cum parmulæ faciebus continuo parallela: opus altum 6 pedes, ut ad 40 pedum latitudinem reclinet necesse habet; si latitudo minus arrideat, oculo ad apicem Thoracis machinæ majoris adplicato, recta collimabis ad extructam molem, donec ipsa campi planities in visus radium incidat; ut hoc modo veram operis tui (scil: conterscharpe) inclinationem assequaris. Ipsis propugnaculis ejusmodi parmulas defensionis ergo objiciunt, hoc modo.

De Parmulis propugnaculis objectis.

Ex Parmulæ cortinalis puncto T circiter 60 aut 50 ped:

50 ped: a fossæ margine distante fiat recta TV parallela faciei propugnaculi: similiter & ab V altera recta in altera propugnaculi parte & a puncto V utrinque binas facies 200 vel 220 pedes longas extrues: Parmulæque sic factæ, pro ratione dimensionum parmulæ cortinalis, fossa, via operta, thoraxque circumducetur. Elatioresque sint hæ parmulæ, quam reliquum vallum 4 ped: quo commodius in hostes prospicere liceat: neve ij qui ex operta via pugnant, lædantur a suis.

De opere Corniculato.

Corniculata dicuntur quod eorum latera ab ipsa munitione cornuum in morem extensa promineant. Alæ propugnaculorum rectis lineis EX DY 700 pedes longis continuentur: quæ si longius extendantur hunc præstabunt usum; ut quidem versus munitionem minui sæpius, & quasi in plura scindi possent propugnacula: At commoditas illa majori compensari potest detrimento, dum a sclopetariis suis propugnatores ægre defenderentur; neque enim ultra 840 pedes in aliquem scopum glans sclopeto dirigi certo poterit: longitudo itaque conveniens servetur; latera hujus operis æqualem cum alis præcipuæ munitionis sortiantur distantiam: quæ si corniculata non suffecerit, obliquo tramite incidentes lineæ latitudinem acquirant commodiorem. Ad utrumque cornu propugnaculum extruitur dimidiatum, debito muni-

endum

endum thorace quibus cortina æquali faciei junctis, tutum undequaque ab incursu hostium redditur corniculatum: quæ propugnacula si vallo 4 aut 6 pedum parte interiori libeat communire; fossa (nam & fossam undequaque 24 sive 36 ped: habere munimentum necesse est) pro valli modo accrescere debet: sin minus lorica, qualem cæteris prætenimus, suffecerit: Egregium hoc opus, verum propugnaculorum mucronibus præcipuæ munitionis commodè prætendi non poterit, ob angustam nimis inter cornua capacitatem, quæ propugnatores in periculum vitæ deduceret, suorum auxilio destitutos. Ala corniculati est æqualis semissi faciei suæ sive cortinæ.

De Figuris inordinatis, & de oppidorum muniendi ratione —— Pleraque oppida & civitates rudis artisque belli ignara antiquitas ad artis muniendi normam minime convenienter struxerunt. Primo peripheriæ civitatis exacta vera & ichnographica requiritur descriptio. Universa namque civitatis muniendæ certitudo, ex angulorum debita inquisitione dependet.

Deinde varias communiendæ civitatis formas depingito: quarum quæ commodissima, minimorumque futura sumptuum eligatur: graviter cavendo ne propugnacula vallique immensa moles uliginosis locis extruantur. Neque tantopere regularitati figuræ inhærendum: Formæ quidem regularitas commodat, at debita

bita mensuræ proportio firmitatem munimento conciliat. Nam irregularis figura siquidem debite proportionata eandem quam regularis commoditatem suppeditabit. Angulus figuræ BAP non sit minor recto, nam quo obtusior eo commodior, Linea colli (Ital recinto) FB vel AG sit 96 120 vel 144 pedum Alæ (Gall: Espaules) sunto cortinæ perpend: sitque earum longitudo 96 120 vel 132 ped: Angulus propugnaculi I vel K ne sit minor gradibus 50 vel major quam 90.

Cortinæ longitudo 480, 720, 960.

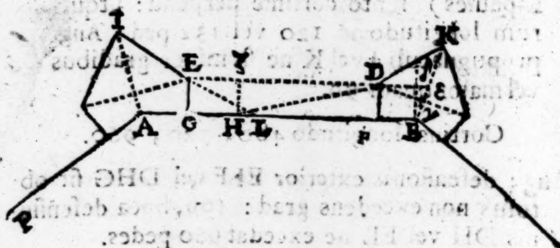
Ang: defensionis exterior ELF vel DHG sit obtusus non excedens grad: 160, linea defensionis DH vel EL ne excedat 960 pedes.

Vallum ad altitudinem 10, 18, 20. pedum extruatnr sitque reclinatio valli interior urbem versus æqualis altitudini, exterior reclinatio $\frac{2}{3}$ altitudinis.

In

In Δ^o D ζ H datur H ζ & ∢ D, quæratur D ζ & DH.

In Δ^o B ♪ datur B ♪ & ∢ ♪ = ½ ∢ B quæratur ♪ & B ♪.



In Δ^o D γ ε datur D γ & ∢ ε quæratur D ε,

In Δ^o D ε K datur ∢ ε & ε K.

Latitudo verticalis valli a 30 ad 40 pedes. Basis, &c.

Thorax altitudinis 6 pedum: latitudinis ad verticem 5, 9, 12, pedum reclinet introrsum 1 ped: extrorsum 2, quocirca basis latitudo erit 8, 12, 15. pedes Scabelli altitudo 1 ped: latitudo 3.

Fulchrum valli (de Barempte relinquit spatium 12. 18. 22.

Fossæ

Fossæ latitudo minima 140, 160, 180 pedum.

Latitudo fossæ sic invenitur, latitudinem valli tum ad verticem tum ad basim adde: summamque dimidiatam duc in altitudinem. Item latitudinem Thoracis tum ad verticem tum ad basim adde, summamque ipsam dimidiatam duc in altitudinem. Factorum summam auctam quinta sui parte, divide per profunditatem fossæ, & quoto invento adde semissem profunditatis pro fossæ latitudine superiore: vel tolle pro latitudine inferiore.

Exemplum: Vallum ad verticem habeat latitudinem 32 pedes, ad basim 55. summam dimidiatam $43\frac{1}{2}$ multiplica per altitudinem 14 pedes & fient 609 pedes. Item thorax ad verticem habeat 10 pedes, ad basim 13, summam dimidiatam $11\frac{1}{2}$ multiplica per altitudinem 6 pedes & fient 69 pedes. Adde igitur 609 & 69 summa erit 678 pedes ipsam auctam quinta sui parte 136. nempe 814 divide per 6 profunditatem fossæ: quotus $135\frac{2}{3}$ auctus semiprofunditate. Erit $138\frac{2}{3}$ latitudo fossæ superior: sed minutus ipsa erit $132\frac{2}{3}$ latitudo inferior. Additur autem $\frac{1}{5}$ quia terra effodienda quantitati valli non conveniet.

In oppidorum munitionibus propugnacula non habeant partes inæquales, sed in singulis propugnaculis anguli extremi faciei atque alæ sint æquales cujus negotii universa difficultas

hæret in linea colli AG vel BF ut ut ergo inquiras quantum ea decurtari aut elongari debeat ut eadem propugnaculis forma maneat, ratio habenda est angulorum figuræ BAP, Quanto enim sunt acutiores, tanto defendentes lineæ erunt longiores, & lineæ colli breviores.

Longitudo lineæ colli geometrice invenietur sic: ab angulo alæ E ducatur recta parallela lateri figaræ AB, item alia recta parallela lineæ BK, distantiam habens æqualem puncti E a linea AI. E concursu harum rectarum D, ala novi propugnaculi perpendiculariter in continam demittatur: fiatque ipsum propugnaculum ad B, partes habens æquales partibus propugnaculi prioris ad A. quod si angulus B nimis foret acutus, linea defensionis DH enormis esset longitudinis: ad quod incommodum vitandum angulum propugnaculi K magis acutum, alasque breviores efficies.

De iis quæ in munitionum quovis loco extructarum aut cômmodum aut detrimentum verti poterunt.

I. Munitionum in planitie horizontali extructarum commoda.

1° Pingue compactumque solum vallo, cæterisque extructis idoneum est,

2° Si flumen haberi posset minimo sumptu commeatus adferri poterit.

3° So-

3° Solnm fertile excultum victum ſuppeditat.

4° Si nimia quantitate rivus excreverit, aut cataractis, aut alio modo, circumjacentes agri in pernitiem hoſtium inundari poſſunt.

5° Talis ſitus ineptus eſt agendis cuniculis, tum propter aquoſitatem, tum quia hoſtis fodiens eminus conſpici poteſt.

6° Regularis forma haberi poteſt.

7° Moleſtum erit hoſti ſuas turmas tegere ne videantur.

Impedimenta.

1° Idem ſolum etiam hoſti thoracibus, munitionibus extruendis conveniens erit.

2° Fluvius etiam hoſtium copiis commeatum adportabit.

3° Agrorum fertilitas etiam hoſti inſerviet.

4° Hoſtis cataractæ ſive aggeris flumen cohibentis campos aqua obſidente uti poterit: & minore opus erit exercitu.

5° Hujuſmodi munitio, ni flumen obſtiterit, undequaque aſſultui obnoxia erit.

6° Sumptuoſa per ſe ſunt enormia propugnacula, magnamque valli molem foſſamque quam latiſſimam requirunt: adeo ut ipſa fere nihil ſuppeditet natura commodi, ac in montibus.

7° Humile depreſſumque ſolum facit ut ſæpiſſime magno cum diſpendio ſubſidant valla aut propugnacula; ad quæ reſareienda maximi quandoque impenduntur ſumptus.

II° Munitionum in convexo montium extructarum commoda.

1^mo Ipsa natura hanc circumnatis vallibus, cum ab incursu hostum, tum è tormentis bellicis, tum cuniculis effodiendis tutatur.

2° Si glebæ quantitas suffecerit, minore & sumptu & opera ipsa extruetur munitio: ac vel in devexo fieri posset, dum sponte sua loci commoditas vallum fossas & propugnaculorum munimenta suppeditet.

3° Disjectas invicem hostium copias teneat oportet, quod suppetiarum tempore molestiam pariet.

Impedimenta.

1° Sub montium cacumine latenter adrepens hostis vallium commoditate frui poterit ut munitionem sine suorum clade adoriatur.

2° Commeatus non sine magno sumptu, ut architectis, sic propugnatoribus, defertur.

3° Penuria aquarum plerunque laborant convexi montes.

4° Fossoribus obnoxii.

5° Pluvia nimbisque magis quam reliqui situs divexantur, cum friabile illic solum magis quam in planitie existat.

6° Formæ commoditas ex voto non succedit architecto.

III°

III° Munitionum in mari extructarum commoda.

1° Si 1500 pedes a littore distent, à tormentis tutæ sunt.
2° Fossoribus non datur aditus.
3° Insultus non patent ob continuam suppetiarum copiam.
4° Sumptuosis non indigent propugnaculis.
5° Nec commeatu magno, nec numeroso propugnatore indigent propter commoditatem portuum.
6° Incertos tormentorum nauticorum ictus non est quod ideo formident ob vacillentem navium cursum, quas tamen ipsi propugnatores lædere possunt.
7° Classe defendi munirique possunt in pernitiem hostium.
8° Nec equitum in his locis usus conceditur.

Impedimentum.

Non tamen hac munitione patriæ fines tuto defendi poterunt dum periculosum inde egredi esse constet.

IV° Munitionum in littore extructarum Commoda.

1 Sicut commodorum, de quibus in 5, 6, 7, 8. marinarum sunt participes, sic quoque eorundem

dem quo procul à mari in campi planitie.

2 Ut eas obsideat hostis & classe & exercitu opus habet.

3 Ex iisdem patriæ fines terra marique defendere possis.

Impedimentum.

Verum ut nec hostem finitimum, sic nec peregrini alicujus assultum, propter alluens mare, effugiet.

V. Munitionum in paludosis locis extructarum commoda.

1 Ipsa palus, quæ ut equiti, sic pedestribus copiis accessum negabit.

2 Nec valli immensa mole, nec celso opus propugnaculo.

Impedimenta.

1 Immodici sumptus, dum vallum cæteraque extruuntur loco minus idoneo viz. ubi fundus moli ferendæ impar solumque nec quantitate nec qualitate operi respondens.

2° Teter quotidie exhalans vapor aerem inficiens infesta lue in milites grassabitur.

3° Parva manu minimisque copiis obsidebit eas hostis, modo propugnaculo aliquo defensoribus exitum præscindat.

4° Generosissimorum defensorum alacritas si hoc limite detineatur, alibi te deficiet.

6° Muni-

6° Munitionum juxta fossam aridam extructarum Commoda.

1° Propugnaculorum vicem suppeditabit: ut in triennali obsidione Ostendæ: ubi magna copia defensores in aridas easque derelictas fossas irruentes, ferocissimos hostium incursus securi quandoque averruncabant.

2 Fugitivo ut militi, sic colono tuta præbet latibula.

3 Si lignis eam adimplere hostis studeat tempore necessitatis exuri poterunt. Si terra lapidibus aliave materia, magnam horum copiam per opertas vias brevissimo temporis spatio offerri poterunt.

4 Nec aer insalubris in hisce locis.

Impedimenta.

1 Si ulterioribus fossæ oris hostis potiatur, obsessos inhibebit ne eorum pecora militesve in ea delitescant.

2 Minimo negotio eam hostis implebit, effodiet cuniculos, aget loricales cophinos, propugnacula extruet seque omnibus modis contra defensorum excussus communiet.

3 Propugnaculis, extructisque suis munimentis paulatim adrepens hostis, vallum, propugnaculum, eruet & demolietur, jam defendentis anguli compos.

7° Mu-

7° Munitionum juxta fossam navigabilem extructarum. Commoda.

1 Fossoribus ad munitionem difficilis est aditus.
2 Teneat ulteriores hostis oras, non tamen in ipsa se fossa ocultare potest.
3 Si aquam deducere tentat, sæpenumero & tempus & laborem fallet.
4 Nec vallum nec propugnaculorum fundamenta munitiunculis suis appropinquabit ut ea latenter evertat.
5 Nisi stagnans aqua fuerit quicquid implendi gratia immiserit, fluctuabit huc illuc.
6 At si gravis fuerit materia, profunditas fossæ, ut impleatur, multum temporis absumet.

Impedimenta.

1 Ne pontem navalem injiciat hostis.
2 Defensoribus exitus non nisi per pontes patet.
3 Hyems in frigidis regionibus congelabit.

Commodissimæ igitur sunt illæ fossæ quæ pro re nata aquis impleri & denuo evacuari possunt.

Extruenda sit munitio, loco quidem idoneo, verum tali, ubi impedimento tempore necessitatis collis impediens esse poterit, (alii collem majorem cupiunt.) Colli autem prætendatur cortina, ut ambobus angi queat angulis defendentibns, nam hoc melius est, quam si in colle extruatur propugnaculum.

Com-

Compendium delineationis Propugnabuli.

1 Latus figuræ AB non minus esse debet quam 480
600 pedes: & in maxima arce vix majus quam 780
900 pedes puta 680 vel 400 & 680, puta 500 800
540.
600.

2 Linea colli AG nec minor sit quam $\frac{1}{5}$ lateris, nec major quam $\frac{1}{19}$. Cortina $\frac{1}{9}$.

3 Ala GE sit $\frac{1}{6}$ lateris, at in quadrato $\frac{4}{15}$.

4 Vallum altum sit 14 vel 16 pedes: reclinans exterius semialtitudine interius altitudine & paulo plus.

5 Latitudo valli superior nec minor sit quam 30 pedes nec major quam 60.

6 Thorax super vallum, altus extra 4 pedes, cujus latitudo est $\frac{1}{3}$ latitudinis valli. Et scammum habeat altum 1 pedem, & latum 3 pedes fere.

7 Inter vallum & fossam spatium sit æquale $\frac{1}{3}$ latitudinis superioris valli 18 & 36.

8 Extra vallum alter sit thorax fossæ proximus.

9 Fossæ profunditas, si fieri poterit æquet altitudinem valli cujus sectio perpendicularis excedat sectionem valli & loricæ sive thoracis, quinta sui parte, habeat etiam fossa utrinque suas reclinationes; unde latior est in summo quam in imo.

10 In omni propugnaculo, semiangulus figuræ CAB æquatur semiangulo propugnaculi AIE, plus angulo lineæ defensionis & cortinæ ILA qui defendens dicitur.

11 In Belgico propugnaculorum describendorum modo, semiangulus propugnaculi nunquam excedat semirectum.

Quare si triens anguli figuræ superet gradus 45, rejiciuntur omnes qui supersunt. In modo autem Italico, angulus propugnaculi augetur una cum angulo figuræ: non quidem proportionaliter: sed tamen cum respectu quodam, ad angulos in arce minima, scil: quadrangula in qua semiangulus figuræ est 45, & semiangulus propugnaculi 30 quorum differentiam 15 (qui angulus est lineæ defensionis & cortinæ addunt semper Itali ad semiangulum figuræ ut habeatur angulus integer propugnaculi.

Exemplum in arce Septangula.

Modus Belgicus.	*Modus Italus.*
180	180
7] 360 [051$\frac{3}{7}$	7] 360 [051$\frac{3}{7}$
3] 2] 128$\frac{4}{7}$	2] 128$\frac{4}{7}$
$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ 64$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ 64$\frac{2}{7}$
$\frac{1}{2}$ ∠ propug: 42 $\frac{1}{2}\frac{6}{1}\frac{6}{7}$	[45 − 30 = 15
	2] 79$\frac{2}{7}$
	39$\frac{2}{4}$

Quare

Quare ang: lineæ
defens: & cortinæ &
ang lineæ defens: cum ala &c. per 10
$64\frac{3}{7}$ -- $39\frac{2}{14}$ = $24\frac{2}{14}$ ang: lin: def: & cort.

Excessus semianguli figuræ in arce data. supra 45; est etiam excessus semianguli propugnaculi in eadem arce supra 30.

Et excessus anguli lineæ defensionis & cortinæ supra 15.

180
7] 360 [05 1 4 3
2] 128, 57 + ang: fig,
64, 29
- 45
2] 19, 29
9, 64 + | 9 64 +
30 | 15
39, 64 + 24 64 +
$\frac{1}{2}$ ∠ ad cent: + $\frac{1}{2}$ ∠ propug. = ∠ inter alam & lin. defensionis FDM.

180
7] 360 [05 1,4 3-
3] 2] 128, 57 + 15
$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ 64, 29 64 29
$\frac{1}{2}$ ∠ propug. 42, 86 79, 29
Belgic: *Ital*:
$\frac{1}{2}$ ∠ figuræ - $\frac{1}{2}$ ∠ propug: = ∠ lin defens & cortin: cujus compl. est ∠ alæ & lineæ defensionis.

Sunt in Propugnaculo 4 Angulorum genera.

1 Rectus Angulus.
2 Angulus Propugnaculi.

3 Angu-

3 Angulus defensionis DHF.
4 Angulus alæ FDK.

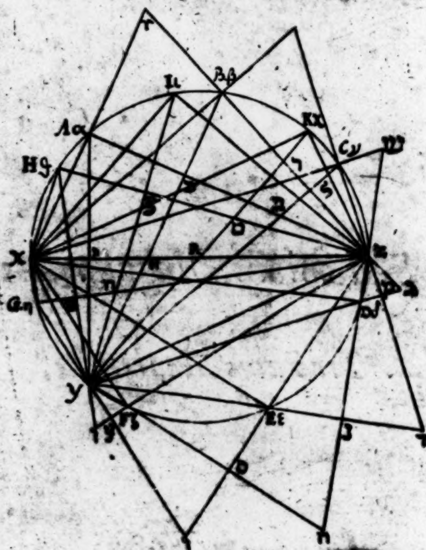
Diagonalium ratio sic est.

1 s 45. R (DFN)	::latitudo.		1 Fa
2 s ½ ∠ prop: R (BKD)			2 Kγ
3 s ∠ lin def: & cort· R)	Diagonal.		3 DH
4 s 90- ∠ lin def: & cor: R)			4 Dδ

2

Sectio-

DE
Sectionibus Angularibus
Tractatus Analyticus.



IN hoc tractatu fractiones sic notantur D)N. pro $\frac{N}{D}$ & quantitas intra curvam Denominator est. Reliqua Numerator. ——

In Schemate R centrum est, XZ Diameter, & (peripheria YX = XA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IK &c. adeoque = YF = XG = AH = BI = CK &c. Et. ZC = ZD + XG &) *XA* ‖ *YB* : X*B* ‖ *YC* : X*C* ‖ *YD* : X*D* ‖ *YE* ‖ X*E* ‖ *YF* : X*F* ‖ *YG* : X*G* ‖ *YH* : X*H* ‖ *YI* : X*I* ‖ *YK*; &c.

Quare perpendiculares sunt recta. Yי. Zי: Yכ: Zכ: Yל. Zל: Yמ. Zמ: Yנ. Zנ: Yס. Zס. Yע. Zע : Yפ. Zפ. Yצ. Zצ. &c. Qua ordine bisecant angulos æquales XRY. *Scil: eam illos qui ad peripheriam dupla YX peripheriæ insistunt quam angulos DZב. EZג. FYד. Nam ∠ מZב = verticali BZC & מZD YDZ - 1 rect* = X*DY. Et similiter ∠ yYד = verticali GYH & yYF = YFZ - 1 rect = YFX &c. Vel etiam propter quadrilaterum YCZD in circulo ∠ ZDב = YCZ &c. -item propter quadrilaterum ZGYF in circulo ∠ YFד = ZGY &c.*

Quare

Quare Isoscelia sunt tam Isosceli YRX quam inter se similia.

Triangula.	*Quare illorum Bases.*		
XYא : AZY	Xא	= ZX - Zא	= ZX - ZB
AYב : BZא	Aב	ZA - Zב	ZA - ZC
BYג : CZב	Bג	ZB + Zג	ZB + ZD
CYד : DZג	Cד	ZC + Zד	ZC + ZE
DYה : EZד	Dה	Zה - ZD	ZF - ZD
EYו : FZה	Eו	Zו - ZE	ZG - ZE
FYז : GZו	Fז	Zז - ZF	ZH - ZF
GYח : HZז	Gח	ZG - Zח	ZG - ZI
HYט : IZח	Hט	ZH - Zט	ZH - ZK

AY	= YA - oo.	
Bא	YB - Yא	= YB - YX
Cב	YC - Yב	YC - YA
Dג	Yג - YD	YB - YD
Eד	Yד - YE	YC - YE
Fה	Yה - YF	YD - YF
Gו	Yו + YG	YE + YG
Hז	Yז + YH	YF + YH
Iח	YI - Yח	YI - YG

Qua

Quæ cum perpendicularibus bisecentur in punctis י. כ. ל. מ. נ. ס. &c. *Si sumantur illarum perpendicularium duplæ, erunt illæ bases Isoscelium, angulum ad basin habentium* = *RYZ adeoque similium tam triangulo YZR quam inter se. Erit autem.*

2Yי	= YA + oo		2Zי	= ZX + Zא	= ZX + ZB
2Yכ	Yא + YB	= YX + YB	2Zכ	ZA + Zב	ZA + ZC
2Yל	Yב + YC	YA + YC	2Zל	ZB - Zג	ZB - ZD
2Yמ	Yג + YD	YB + YD	2Zמ	Zד - ZC	ZE - ZC
2Yנ	Yד + YE	YC + YE	2Zנ	Zה + ZD	ZF + ZD
2Yס	Yה + YF	YD + YF	2Zס	Zו + ZE	ZG + ZE
2Yע	Yו - YG	YE - YG	2Zע	Zז + ZF	ZH + ZF
2Yפ	YH - Yז	YH - YF	2Zפ	Zח + ZG	ZI + ZG
2Yצ	Yח + YI	YG + YI	2Zצ	Zט + ZH	ZK + ZH &c.

 Hisce

Hisce sic constitutis clarissime liquet esse.

I.

RY : YX   YX : Xא   YA : Aב
:: : ZX-ZB. :: : ZA-ZC
R : A   A : 2R-β   B : α-γ

YB : Bג   YC : Cד
:: : ZB+ZD :: : ZE+ZC
C : β+δ   D : ε+γ

YD : Dה   YE : Eו   YF : Fז
:: : ZF-ZD :: : ZG-ZE :: : ZH-ZI
E : ζ-δ   F : η-ε   G : θ-ζ

YG : Gח   YH : Hט
:: : ZG-ZI. :: : ZH-ZK.
H : η-ι   I : θ-κ &c.

II. RY

II.

RY : YX ZA : AY. ZB : Bא
:: : YA :: : YB-YX
R : A α : B-oo β : C-A

ZC : Cב ZD : Dג ZE : Eד
: YC-YA :: : YB-YD :: : YC-YE
γ : D-B δ : C-E ε : D-F

ZF : Fה ZG : Gו ZH : Hז
: YD-YF :: : YE+YG :: : YF+YH
ζ : E-G η : F+H θ : G+I

ZI : Iח
: YI-YG
ι : K-H &c.

III.

RZ : ZA YX : YA. YA : 2Yב
:: : YA. :: : YX+YB
R : α A : B+oo B : A+C

YB : 2Yל	YC : 2Yמ	YD : 2Yנ
: YA + YC ::	: YB + YD ::	: YC + YE
C : B + D	D : C + E	E : D + F
YE : 2Yס	YF : 2Yע	YG : 2Yפ
: YD + YF ::	: YE - YG ::	: YH - YF
F : E + G	G : F - H	H : I - G

YH : 2Yצ
: YG + YI.
I : H + K &c.

I V.

RZ : ZA	ZA : 2Zי	ZB : 2Zכ
::	: ZX + ZB ::	: ZA + ZC
R : α	α : 2R + β	β : α + γ
ZC : 2Zל	ZD : 2Zמ	ZE : 2Zנ
: ZB - ZD ::	: ZE - ZC ::	: ZF + ZD
γ : β - δ	δ : ε - γ	ε : ζ + δ
ZF : 2Zס	ZG : 2Zע	ZH : 2Zפ
: ZG + ZE ::	: ZH + ZF ::	: ZG + ZI.
ζ : η + ε	η : θ + ζ	θ : η + ι

ZI :

ZI : 2ZΣ
: ZH + ZK
ι: ϑ + κ &c.

Quatuor hæ propositiones primariæ sunt, & augeri poterint in infinitum; sumendo pro antecedentibus terminis chordas arcuum sectionum incipientium ab initio Diametri, notatas literis majusculis Latinis, in prima & tertia; vel chordas conjunctorum incipientium à fine Diametri notatas literis minusculis Græcis in secunda & quarta: pro consequentibus autem bimembribus chordas alternorum (i. e. trinque antecedenti proximorum) arcuum sectionum, connexas signo + in tertia & signo —— in secunda; sive conjunctorum, connexas signo + in quarta & signo —— in prima. *Hac tamen cautione* quod in prima & quarta si finis Diametri cadat in sectionem mutatur signum solumodo quando sectio ad finem Diametri est antecedens terminus rationis. Sed si cadat inter duas sectiones mutantur signa in utraque. Verum in secunda & tertia si initium Diametri post revolutionem cadat in sectionem, mutatur signum solumodo quando sectio ad initium Diametri est antecedens terminus rationis, sed si cadat inter duas sectioner, mutantur signa in utraque sicut patet propositiones ipsas atque Schema intuenti,

Ex

Ex his quatuor primariis propositionibus aliæ innumeræ oriuntur. Nos aliquot ponemus, easque quasi in eodem semicirculo, sine signorum mutatione: Reliquas analytices studiosis relinquemus.

V. R : A :: A : 2 R - β :: β : C - A :: C : β - δ :: δ : E-C :: E : δ-ζ :: ζ : G-E :: G : ζ-ϑ :: ϑ : I-G-&c. Ex processu. I^{a} &. II^{a}. mixtim.

VI. 2 R : A :: R : $\sqrt{}$q : Rq $\frac{1}{4}$ αq :: α : $\sqrt{}$q. αq - $\frac{1}{4}$ Q : 2 R + β :: β : $\sqrt{}$q. βq - $\frac{1}{4}$ Q : α + γ :: γ : $\sqrt{}$q. γq - $\frac{1}{4}$ Q : β + δ :: δ : $\sqrt{}$q δq - $\frac{1}{4}$ Q : γ + :: &c : ex processu IV^{a}. Item

VII. 2 R : A :: A : $\sqrt{}$q. Aq - $\frac{1}{4}$ Bq :: B : $\sqrt{}$q. Bq - $\frac{1}{4}$ Q : A + C :: C : $\sqrt{}$q : Cq - $\frac{1}{4}$ Q : B + D :: D : $\sqrt{}$q. Dq - $\frac{1}{4}$ Q. C + E :: E : $\sqrt{}$q. Eq - $\frac{1}{4}$ Q : D + F &c. Ex processu. III^{a}.

—— *Nam pro* VI. est. ZX : XA :: ZR : ($\sqrt{}$q. Rq - $\frac{1}{4}$ ZAq. *vel*) $\sqrt{}$q. ZRq - Q $\frac{1}{2}$ ZA :: ZA : $\sqrt{}$q. ZAq - Z'q :: ZB : $\sqrt{}$q ZBq - Zגq &c. & *pro* VII. est. ZX : XA :: YX : ($\sqrt{}$q. YXq - $\frac{1}{4}$ YAq *vel*) $\sqrt{}$q. YXq : - Q : $\frac{1}{2}$ YA :: YA : $\sqrt{}$q. YAq - Yגq :: YB : $\sqrt{}$q. YBq —— Yלq &c.

VIII. 2 R : α :: 2 α :: 2 R + β :: 2 β : α + γ :: 2 γ : β + δ :: &c. ex processu IV^{a}.

IX. $2R : \alpha :: 2A : B + 0 :: 2B : A \pm C :: 2C : B + D ::$ &c. ex processu III°.

X.

ZA : AX		XB : Bר		ZC : Cר
	::	: Br	::	: XC-Xr
α : A		B : 2 R-β		γ : C-2A

XD : Dש
:: :ZD plus ZB - Bר
D : $\delta + 2\beta - 2R$:

Nam similia sunt triangula rectangula XAZ : XBר : ZCר : XDש *&c. Dimidia Isoscelium similium* XrZ , Xrר : Zשר : Xsש *&c.*

XI. Ex processu III° per interpretationem.

$R : \alpha :: A : R) \alpha A = B.$

$R : \alpha :: R) \alpha A : R^2) \alpha^2 A = A + C.$ quare mi. A erit.

$R^2) \alpha^2 A — R^2 A = C.$

$R : \alpha :: R^2) \alpha^2 A — R^2 A : R^3) \alpha^3 A — R^2 \alpha A = B + D.$ qu. mi. B.

$R^3) \alpha^3 A — 2 R^2 \alpha A = D.$

$R : \alpha :: R^3) \alpha^3 A — 2 R^2 \alpha A : R^4) \alpha^4 A — 2R^3 \alpha^2 A = C + E$: mi. C.

$R^4) \alpha^4 A — 3 R^3 \alpha^2 A + R^4 A = E.$

$R^5) \alpha^5 A — 4 R^3 \alpha^3 A + 3 R^4 \alpha A = F.$

$R^6) \alpha^6 A$

$R^6) \alpha^5 A - 5 R^2 \alpha^4 A + 6 R^4 \alpha^2 A - R^6 A = G$
&c.

XII. Ex processu IV^o per interpretationem.

$R : \alpha :: \alpha : R) \alpha^2 = 2R + \beta$ quare mi. 2 R
Erit.
$R) \alpha^2 - 2R^2 = \beta.$
$R : \alpha :: R) \alpha^2 - 2R^2 : R^2) \alpha^3 - 2R^2\alpha = \alpha + \gamma$ qu. mi. α.
$R^2) \alpha^3 - 3R^2\alpha = \gamma.$
$R : \alpha :: R^2) \alpha^3 - 3R^2\alpha : R^3) \alpha^4 - 3R^2\alpha^2 = \beta + \delta$: mi. β.
$R^3) \alpha^4 - 4R^2\alpha^2 + 2R^4 = \delta.$
$R^4) \alpha^5 - 5R^2\alpha^3 + 5R^4\alpha = \varepsilon.$
$R^5) \alpha^6 - 6R^2\alpha^4 + 9R^4\alpha^2 - 2R^6 = \zeta.$
$R^6) \alpha^7 - 7R^2\alpha^5 + 14R^4\alpha^3 - 7R^6\alpha = \eta$ &c.

Notandum autem eſt de propoſitionibus XI. XII. XIII. XIV. quod quibus in ſectionibus juxta cautionem poſt quatuor propoſitiones primarias traditam ſigna mutantur, & in earum etiam chordis ſigna omnia immutari debent.

XIII. Aliter ex processu III^o per interpretationem.

$A : B :: B : A) B^2 := A + C.$ qu. mi. Erit.
$A) B^2 - A^2 = C.$
$A : B :: A) B^2 - A^2 : A^2) B^3 - BA^2 = B + D$ mi. B. Erit.
$A^2) B^3 - 2BA^2 = D.$

A: B

A : B :: A^2) B^3 —— 2 BA^2 : A^3) B^4 —— 2 B^2A^2 :
= C + Equ. mi. C erit.
A^3) B^4 —— 3 B^2A^2 + A_4 = E.
A_4) B^5 —— 4 B^3A^2 + 3 BA_4 = F.
A^5) B^6 —— 5 B_4A^2 + 6 B^2A_4 —— A^6 = G. &c.

XIV. Per alternam factionem ex processu I^m & II^m (*i. e. ex processu V^m*) per interpretationem.

R : A :: A : R) A^2 = 2 R - ϐ : qu : è 2 R : rest :
R) $2R^2$ - A^2 = ϐ.
R : A :: R) $2R^2$ —— A^2 : R^2) $2R^2A$ —— A^3 = C —— A : qu : + A :
R^2) $3R^2A$ —— A^3 = C.
R : A :: R^2) $3R^2A$ —— A^3 : R^3) $3R^2A^2$ —— A^4 : = ϐ —— δ : qu : è : ϐ. rest :
R^3) 2 R^4 —— 4 R^2A^2 + A^4 = δ.
R : A :: R^3) $2R^4$ —— $4R^2A^2$ + A^4 : R^4) $2R_4A$ - 4 R^2A^3 + A^5 : = E —— C qu : + C :
R_4) 5 R_4A —— 5 R^2A^3 + A^5 = E.
R^5) $2R^6$ —— 9 R_4A^2 + 6 R^2A_4 —— A^6 = ζ.
R^6) $7R^6A$ —— 14 R_4A^3 + 7 R^2A^5 - A^7 = G &c.

In his quatuor novissimis propositionibus, unciæ præfixæ affectionibus cujuscunque æquatinis sunt numeri Radicales Triangulares, Pyramidales, Triangulo-triangulares, Triangulo-pyramidales, Pyramido-pyramidales, eoque deinceps ordine: In XI^a. quidem & XIII^a. incrementum capiunt ab 1. in XII^a. & XIV^a a 2.

1					
2					
3	1				
4	3				
5	6	1			
6	10	4			
7	15	10	1		
8	21	20	5		
9	28	35	15	1	
10	36	56	35	6	
r.	t.	p.	tt.	tp.	pp.

Prop. XI. & XIII.

2					
3					
4	2				
5	5				
6	9	2			
7	14	7			
8	20	16	2		
9	27	30	9		
10	35	50	25	2.	
r.	t.	p.	tt.	tp.	pp.

Prop. XII. & XIV.

Et

Et in XII & XIV numerus ſectionum chordæ quæſitus in radicibus propriæ Tabellæ dabit uncias, at in XI & XIII. numerus ſectionum minutus binario.

Pro continuatione Tabularum nota quod inveniuntur triangulares collectis radicibus, pyramidales collectis triangularibus, triangulo-triangulares collectis pyramidalibus, &c.

Si quatuor ſeries continue proportionalium pro his quatuor propoſitionibus conſtituantur ſcil.

Pro. XI. $R : \alpha :: A : R) \alpha A : R^2) \alpha^2 A : R^3) \alpha^3 A : R^4) \alpha^4 A : R^5) \alpha^5 A : R^6) \alpha^6 A$ &c.

Pro. XII. $R : \alpha :: \alpha : R) \alpha^2 : R^2) \alpha^3 : R^3) \alpha^4 : R^4) \alpha^5 : R^5) \alpha^6 : R^6) \alpha^7$ &c.

Pro XIII. $A . B :: B : A) B^2 : A^2) B^3 : A^3) B_4 : A^4) B^5 : A^5) B^6 : A^6) B^7$ &c.

Pro. XIV. $R : A :: A : R) A^2 : R^2) A^3) : R^3) A^4 : R^4) A^5 : R^5) A^6 : R^{\prime}) A^7$ &c.

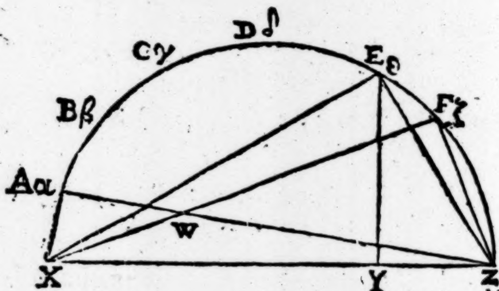
Proportionales illæ alternæ & alternatim affirmatæ atque negatæ cum unciis legitime affixis conficiunt ſingulas æquationes in unoquoque genere e. g.

In XII. $R^6) \alpha^7 — R^4) 7\alpha^5 + R^2) 14\alpha^3 — 7\alpha = n$: & in XIII. $A^4) B^5 — A^2) 4B^3 + 3B = F$.

XV. In VII est. $2R : A :: A : V : A^2 — \frac{1}{4}B^2$: Est igitur $4 R^2) A^4 = A^2 — \frac{1}{4} B^2$ Ideoque $R^2) 4 R^2A^2 — A^4 = B^2$. At vero per III. $B^2 = A^2 + CA$ Quare $R^2) 4R^2A^2 — A^4 = A^2 + CA$ vel $R^2) 3R^2 A^2 — A^4 = CA$: & divisa utraque æquationis parte per A erit. $R^2) 3R^2A — A^3 = C$ Ergo.

$R^2 : 3R^2 — A^2 :: A : C$.

XVI. Si ab initio Diametri X sumantur in semicirculo tres arcus, sic ut aggregatum minimi & medii æquentur maximo ($A + E = F$)



ΔΔ Rectangula similia sunt, ZYE XAW. XYE. XZE. FWZ. &c.

Erit

Erit Primo. Rectangulum ſub Diametro & chorda maximi æquale rectangulo ſub chorda medii & chorda conjuncti minimo plus rectangulo ſub chorda minimi & chorda conjuncti medio.

Dico 1°. $2RF = E\alpha + A\iota$ *&c. ut in XVI.*

Nam.

$$2RF = \frac{ZY \times XW}{A\iota} + \left(\frac{XY \times XW}{AW \times E} \text{ plus } \frac{2R \times FW}{ZW \times E} = \right) E\alpha.$$

Erit ſecundo Rectangulum ſub Diametro & chorda conjuncti maximo, æquale rectangulo ſub chordis conjunctorum medio & minimo, minus rectangulo ſub chordis medii & minimi.

Dico 2° $2R\zeta = \alpha\iota - AE$ *&c. ut in XVII.*

Nam. $ZX \times ZF. = (ZW \times ZE =)\ ZA \times ZE$ mi: $(ZE \times AW =)\ XA \times XE.$

Erit tertio Rectangulum ſub Diametro & chorda minimi æquale rectangulo ſub chorda maximi & chorda conjuncti medio minus rectangulo ſub chorda medii & chorda conjuncti maximo.

Dico. 3°. $2RA = F\iota - E\zeta$ *&c. ut in XVIII.*

Nam. $E : \iota :: F - XW : \zeta$: Quare $F\iota - (\iota \times XW =)\ 2RA = E\zeta.$ &c.

Erit

Erit quarto Rectangulum sub Diametro & chorda conjuncti minimo, æquale rectangulo sub chordis conjunctorum maximo & medio, plus rectangulo sub chordis maximi & medii.

Dico. 4°. $2R\alpha = {:}\zeta + EF$ *&c. ut in* XIX.

Nam.

$$2R\alpha = \frac{ZY \times ZW}{{:}\zeta} \text{plus} \left(\frac{XY \times ZW}{{:}E \times FW} + \frac{2R \times AW}{E + XW} \right) EF$$

Erit quinto. Rectangulum sub Diametro & chorda medii, æquale rectangulo sub chorda maximi & chorda conjuncti minimo, minus rectangulo sub chorda minimi & chorda conjuncti maximo.

Dico 5°. $2RE = F\alpha - A\zeta$: *&c. ut in* XX.

Nam per XVI *primò.* $2RG = F\alpha + A\zeta$ *& per* III *vel* IX $2RG + 2RE = 2F\alpha$ *Quare facta subductione Erit.* $2RE = F\alpha - A\zeta$.

Vel. sic. per V. $2RG - 2RE = 2A\zeta$ *ex* $2RG = F\alpha + A\zeta$ *relinquit* $2RE = F\alpha - A\zeta$.

Erit sexto. Rectangulum sub Diametro & chorda conjuncti medio æquale rectangulo sub chordis conjunctorum maximo & minimo, plus rectangulo sub chordis maximi & minimi.

Dico

Dico 6°. $2R\iota = \zeta\alpha + AF$ *&c. ut in* XXI.

Nam per. IV *vel* VIII. $2R\iota + 2R\nu = 2\alpha\zeta$: tolle $2R\nu = \alpha\zeta + AF$ *per* XVI. *Secundò. rest*: $2R\iota = \alpha\zeta + AF$.

Consectarium. Si in tribus rectangulis triangulis planis (AZX : EZX : FZX :) angulus ad Cathetum secundi, plus angulo ad Cathetum primi æquetur angulo ad Cathetum tertii (√ EZX + √ AZX = √ FZX. *Nam Bases voco chordas arcuum æqualiter crescentium notatas literis Latinis majusculis, & Cathetos chordas arcuum conjunctorum notatas literis minusculis Græcis* :) Erit trianguli tertii, Hypotenusa, ad Rectangulum sub Hypotenusis primi & secundi, : Sicut basis ad rectangulum sub base primi & Catheto secundi, plus Rectangulo sub base secundi & Catheto primi: Et sicut Cathetus, ad rectangulum sub Cathetis primi & secundi, minus rectangulo sub basibus eorundem. Scil.

$2R : 4R^2 :: F : A\iota + E\alpha :: \zeta : \alpha\iota - AE.$

Nam ostensum est $2RF = A\iota + E\alpha$.. & $2R\zeta = \alpha\iota - AE$ Estque idcirco. $2R : F :: 4R^2 : A\iota + E\alpha$ &. $2R : \zeta :: 4R^2 : \alpha\iota - AE$.

Nam (*universaliter*) Si sit $AB = C^2$. multiplicando utrinque per A fiet $A^2B = AC^2$. Quare $A : B :: A^2 : C^2$.

Erit

Erit etiam Trianguli primi hypotenusa ad rectangulum sub hypotenusis secundi & tertii: sicut basis ad rectangulum sub base tertii, & catheto secnndi, minus rectang. sub base secundi & catheto tertii. Et sicut cathetus ad rectangulum sub cathetis secundi & tertii plus rectang° sub basibus eorundem. Scil.
2R: $4R^2$ :: A : $F\varepsilon$ — $E\zeta$ :: α: $\varepsilon\zeta + EF$.

Nam ostensum est 2RA = $F\varepsilon$ — $E\zeta$ & 2 Rα = $\varepsilon\zeta + EF$.
Estque idcirco 2R : A :: $4R^2$: $F\varepsilon$ — $E\zeta$ &. 2 R: α :: $4R^2$: $\varepsilon\zeta + EF$.

Erit denique Trianguli secundi Hypotenusa ad rectangulum sub hypotenusis primi & tertii: Sicut Basis ad rectangulum sub base tertii & catheto primi, minus rectang° sub base primi & catheto tertii: Et sicut cathetus ad rectangulnm sub cathetis primi & tertii plus rectang° sub basibus eorundem. Scil 2 R : $4R^2$ :: E : $F\alpha$ — $A\zeta$ :: ε: $\alpha\zeta$ + AF.

Nam ostensum est 2 RE = $F\alpha$ — $A\zeta$ & 2 Rε = $\alpha\zeta$ + AF.
Estque idcireo 2 R : E :: $4R^2$: $F\alpha$ — $A\zeta$ &. 2 R : ε :: 4 R : $\alpha\zeta$ † AF.

Synopsis

Synopsis Æquationum in Rectangulis quando arcus æqualiter crescunt.

XVI. Primò.

$$\left.\begin{matrix} 2RB \\ 2RC \\ 2RD \\ 2RE \\ 2RF \\ 2RG \\ 2RH \\ 2RI \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A\alpha + A\alpha \\ A\beta + B\alpha \\ A\gamma + C\alpha \\ A\delta + D\alpha \\ A\varepsilon + E\alpha \\ A\zeta + F\alpha \\ A\eta + G\alpha \\ A\theta + H\alpha \end{matrix}\right.$$

&c.

XVII. Secundò.

$$\left.\begin{matrix} 2R\beta \\ 2R\gamma \\ 2R\delta \\ 2R\varepsilon \\ 2R\zeta \\ 2R\eta \\ 2R\theta \\ 2R\iota \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \alpha\alpha - AA \\ \alpha\beta - AB \\ \alpha\gamma - AC \\ \alpha\delta - AD \\ \alpha\varepsilon - AE \\ \alpha\zeta - AF \\ \alpha\eta - AG \\ \alpha\theta - AH \end{matrix}\right.$$

&c.

XVIII. Tertiò. XIX. Quartò.

$$2RA = \left\{\begin{array}{l} B\alpha - A\beta \\ C\beta - B\gamma \\ D\gamma - C\delta \\ E\delta - D\epsilon \\ F\epsilon - E\zeta \\ G\zeta - F\eta \\ H\eta - G\theta \\ I\theta - H\iota \end{array}\right. \qquad 2R\alpha = \left\{\begin{array}{l} \alpha\beta + AB \\ \beta\gamma + BC \\ \gamma\delta + CD \\ \delta\epsilon + DE \\ \epsilon\zeta + EF \\ \zeta\eta + FG \\ \eta\theta + GH \\ \theta\iota + HI \end{array}\right.$$

XX. Quintò.

$$\begin{array}{l} 2RA \\ 2RB \\ 2RC \\ 2RD \\ 2RE \\ 2RF \\ 2RG \\ 2RH \end{array} = \begin{array}{l} B\alpha - A\beta \\ C\alpha - A\gamma \\ D\alpha - A\delta \\ E\alpha - A\epsilon \\ F\alpha - A\zeta \\ G\alpha - A\eta \\ H\alpha - A\theta \\ I\alpha - A\iota \end{array}$$

XXI. Sextò.

2Rα		βα	+	AB
2Rβ		γα	+	AC
2Rγ		δα	+	AD
2Rδ	=	εα	+	AE
2Rε		ζα	+	AF
2Rζ		ηα	+	AG
2Rη		ϑα	+	AH
2Rϑ		ια	†	AI.

Ex harum ſex propoſitionum collatione innumeræ æqualitates oriuntur : Quales ſunt hæ.

XXII. Ex primò & ſecundò (*ſcil. ex* XVI & XVII) per additionem.

2R in B + β = α in A + α plus A in α —— A
α α + A A α —— A.
2R in C + γ = α in B + β plus A in β —— B.
β α + A B α —— A
2R in D + δ = α in C + γ plus A in γ —— C.
γ α + A C α —— A
2R in E + ε = α in D + δ plus A in —— D
δ α + A D α —— A.

2R in F + ζ = α in E + ε plus A in ε —— E.
ε α + A E α —— A.
2R in G + η = α in F + ζ plus A in ζ —— F.
ζ α + A F α —— A.
&c.

XXIII. Ex quintò & sextò (*scil. ex* XX & XXI) per Additionem.

2R in A + α = α in B + β plus A in B —— β.
B α + A β α —— A.
2R in B + β = α in C + γ plus A in C —— γ
C α + A γ α —— A
2R in C + γ = α in D + δ plus A in D —— δ
D α + A δ α —— A
2R in D + δ = α in E + ε plus A in E —— ε
E α + A ε α —— A
&c.

XXIV. Et per utriusque præcedentis comparationem,

α in A + α plus A in α —— A = 2R in B + β =
C + γ C —— γ
α in B + β plus A in β —— B = 2R in C + γ =
D + δ D —— δ
α in C + γ plus A in γ —— C = 2R in D + δ =
E + ε E —— ε.
&c.

Atque

Atque hujusmodi ratiocinatio per subductionem institui poterit.

XXV. Ex tertiò & quartò *per transpositionem.*

B in $\alpha + \gamma$ ═══ β in A + C.
C in $\beta + \delta$ ═══ γ in B + D
D in $\gamma + \varepsilon$ ═══ δ in C + E &c.

B in C — A ═══ β in α — γ
C in D — B ═══ γ in β — δ

XXVI. Ex tertiò & quartò per Additionem.

B in A + α — C + γ = β in A — α + C + γ
C B + β — D + δ γ B — β + D + δ
D C + γ — E + ε δ C — γ + E + ε.
&c.

XXVII. *Et per utriusque præcedentis comparationem.*

A + C : $\alpha + \gamma$ :: (B : β ::)
A + C — $\alpha + \gamma$: $\alpha + \gamma$ + A — C.
B + D : $\beta + \delta$ :: (C : γ ::)
B + D — $\beta + \delta$: $\beta + \delta$ + B — D.
C + E : $\gamma + \varepsilon$ :: (D : δ ::)
C + E — $\gamma + \varepsilon$: $\gamma + \varepsilon$ + C — E &c.

XXVIII.

XXVIII. *Ex* XXIV. *Transponendo & Resoluta æqualitate in Analogiam.*

$A + \alpha - C - \gamma : A - \alpha + C - \gamma :$
$B + \beta - D - \delta : B - \beta + D - \delta :$
$C + \gamma - E - \epsilon : C - \gamma + E - \epsilon :$ $:: A : \alpha$
$D + \delta - F - \zeta : D - \delta + F - \zeta :$
$E + \epsilon - G - \eta : E - \epsilon + G - \eta :$
$F + \zeta - H - \vartheta : F - \zeta + H - \vartheta :$

&c.

Hinc datis chordis arcus quintupli & tripli investigari poterit chorda ipsius arcus: Et datis chordis arcus septupli & quintupli investigari poterit chorda arcus tripli &c. Nam,

$A + \alpha - C - \gamma$ in $C - \gamma + E - \epsilon = A - \alpha + C - \gamma$ in $C + \gamma - E - \epsilon$ factaque multiplicatione & æqualium expunctione. Erit A in $E - \gamma$ plus α in $C - \epsilon = C^2 - C\epsilon + E\gamma + \gamma^2$: Pro cognitis $E - \gamma$ sumatur M. Pro $C - \epsilon$ sumatur N & pro $Cq - C\epsilon + E\gamma + \gamma q$ sumatur Pl. Estque $\alpha = \sqrt{q} : 4\,Rq - Aq$: Quare $MA + \sqrt{q} : 4\,Rq\,Nq - Nq\,Aq : = Pl.$ vel $4\,Rq\,Nq - Nq\,Aq = Plq - 2\,PLMA + Mq\,Aq$ vel $Mq + Nq)\ 2\,PLMA : - Aq = Mq + Nq)\ Plq - 4\,Rq\,Nq$ &c.

Exem-

Exemplum prop: XII.

0.	R.	1, 0000000000.
I.	α.	1, 9400000000.
II.	R) α^2	3, 7636000000.
III.	R^2) α^3	7, 3013840000.
IV.	R^3) α^4	14, 1646849600.
V.	R^4) α^5	27, 4794888224.
VI.	R^5) α^6	53, 310208315456.
VII.	R^6) α^7	103, 421804131198464.

R.	1,0000000.	Grad.	
α.	1,9400000.	14,069.	I.
β.	1,7636000.	28, 138.	II-2R.
γ.	1,4813840.	42,207.	III-3·I.
δ.	1, 1102849.	56, 276.	IV-4II+2R.
ε.	0, 6725688.	70, 345.	V-5III+6I.
ζ.	0, 1944986.	84, 414.	VI-6IV+9II-2R.
η.	0,2952415.	98, 483.	VII-7V+14III-7I.

Exem-

Exemplum prop: XIV.

0.	R.	1, 0000000000.
I.	A.	0, 2420000000.
II.	$R)A^2$.	0, 0585640000.
III.	$R^2)A^3$.	0, 014172488.
IV.	$R^3)A^4$.	0, 003429742096.
V.	$R^4)A^5$.	0, 00082999758 7232.
VI.	$R^5)A^6$.	0, 000200859416110144.
VII.	$R^6)A^7$.	0, 0000486079786986 54848.

R.	1, 0000000	Grad.	
A.	0, 2420000	13, 9.	I.
6.	1, 9414360	27, 8.	2R-II.
C.	0, 7118275	41, 7.	3 I-III.
δ.	1, 7[illegible]91737	55, 6.	2R-4II + IV.
E.	1, 3819675	69, 5.	6 I-5III + V.
ζ.	1, 4933016	83, 4.	2R-9II + 6IV-VI.
G.	1, 5013963.	97, 3.	7I-14III + 7 V-VII.

XXIX. De

XXIX. De sectionibus Angulorum: Et de quot lateribus æquatio quælibet angularium sectionum inventa per propositionem XIV poterit explicari.

Quoniam eadem chorda inservit tum arcui, tum complemento ejusdem ad integrum circulum; æqualitas inter chordam ipsam & chordam segmenti arcus minoris pertinebit etiam ad chordam similis segmenti arcus majoris. Insuper pertinebit ad chordas aliarum sectionum, quæ majorem minoremve in circulationibus component, semicirculum vero non excedunt: nempe ad chordam aggregati e segmento arcus dati tum minoris tum majoris, & similis segmenti binorum quaternorum, senorum, &c. circulorum; modo aggregatum illud semicirculo non sit majus: hoc est modo in trisectione minus sit quam 3)1 $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$ in quinquesectione quam $\frac{2\frac{1}{2}}{5}$ in septusectione quam $\frac{3\frac{1}{2}}{7}$ in nonusectione quam $\frac{4\frac{1}{2}}{9}$, in undecusectione quam $\frac{5\frac{1}{2}}{11}$ in tredecusectione quam $\frac{6\frac{1}{2}}{13}$, in quadragequintusectione quam $\frac{22\frac{1}{2}}{45}$ & sic ulterius in infinitum.

Componere *arcum v. g.* XA *intelligit arcum quemcunque qui incipiendo ab eodem peripheriæ puncto* X *aliquoties (puta tredecies) sumptus, circulatione facta in idem punctum A desinit, talis est arcus* 13) *C* † X*A. cujus*

tredecupli supra integrum circulum excessus, est ipse arcus X.A.

Binorum vero senorum &c. circulorum *dicit, quia si numerus circulorum sit impar, signa omnia mutanda sunt, ut ex adnotatis ad* XII *&* IV *hujus facillime colligitur.*

Exemplum ponam de tredecusectione, in quo C significat integrum circulum & N. arcum semicirculo minorem tredecusecandum.

Est igitur 13)6 C + N minor semicirculo: effertur autem de radicibus septem.

Chorda Chorda

1. 00 + 13) N. 2. 13) C-N.
3. 13)2 C + N. 4. 13)3 C-N i.e. 13)2Cpl:C-N
5. 13)4 C + N. 6. 13)5 C-N. i.e. 13)4Cpl:C-N
7. 13)6 C + N- qui semicirculo minor est quia N minor ½ C.

Atque hinc sequitur quod in trisectione & quadrisectione solutio erit duplex: in quintusectione & sextusectione triplex: in septusectione & octusectione quadruplex: in nonusectione & decusectione quintuplex: in undecusectione & duodecusectione sextuplex: &c. qui numerus in singulis æqualis est semissi paris imparem proxime sequentis: quare in quadragequintusectione erit vigetriplex.

XXX. Latus homogeneum differentiæ quadratorum a partibus poteſtatis cujuſque eſt differentia quadratorum a nominibus radicis. At ſi ſpecies in partibus poteſtatis cujuſque collectæ ipſæ etiam alternatim affirmentur & negentur latus homogeneum ſummæ quadratorum ex iis eſt ſumma quadratorum a nominibus radicis. Exempli gratia.

C: Aq-Eq = Q: Ac + 3 AEq mi: Q: 3 AqE + Ec.
C: Aq+Eq = Q: Ac - 3 AEq pl: Q: 3 AqE-Ec.

Eſt prop: 4. cap. 17. Clavis Math. *quam conſule cum pluribus quæ huc ſpectant, ibidem & in fine* Cap. 16. *demonſtratis. Nam in* Cap. 16. *prop.* 14. *quod appellatur triangulum ſimplum, bicompoſitum, tricompoſitum, quadricompoſitum &c. eſt triangulum anguli ſimpli, dupli, tripli, quadrupli, &c.*

Hinc multæ oriuntur chordarum in angularibus ſectionibus ſimilitudines.

Chorda arcus: & complementi ad semicirculum: Hypotenusa quæ & Diameter.

Duplic.

Q: $H^2 — \alpha^2$: $2H\alpha$. $H^2 + \alpha^2$.

Triplic.

C: $H^3 — \alpha^3$: $3H^2\alpha + \alpha^3$ · $H^3 + 3H\alpha^2$

$\sqrt{}^2$ Quadrup.

QQ: $H^4 — \alpha^4$ $4H^3\alpha + 4H\alpha^3$ $H^4 + 6H^2\alpha^2 + \alpha^4$

Quintup.

QC: $H^5 — \alpha^5$ $5H^4\alpha + 10H^2\alpha^3 + \alpha^5$ $H^5 + 10H^3\alpha^2 + H\alpha^4$

Duplic.

Q: $H^2 — A^2$: $2HA$ $H^2 + A^2$

Triplic.

C: $H^3 — A^3$: $3H^2A + A^3$ $H^3 + 3HA^2$

$\sqrt{}^2$: Quadrup.

QQ: $H^4 — A^4$: $4H^3A + 4HA^3$ $H^4 + 6H^2A^2 + A^4$

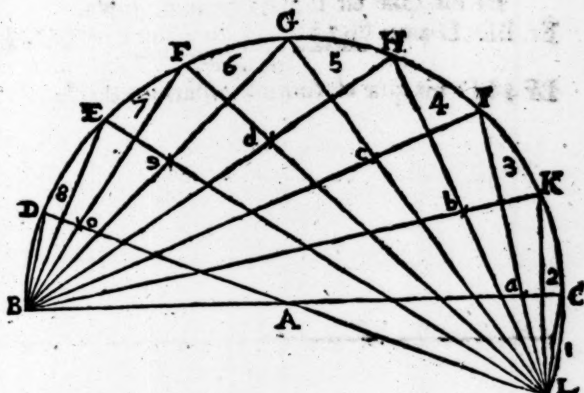
Quintup.

QC: $H^5 — A^5$: $5H^4A + 10H^2$ [$A^3 + A^5$ $H^5 + 10H^3A^2 + 5$ [HA^4

$2\alpha A$.	$\alpha^2 — A^2$	Q: $\alpha^2 + A^2 = H^2$
$3\alpha^2 A - A^3$	$\alpha^3 - 3\alpha A^2$	C: $\alpha^2 + A^2 = H^3$
$4\alpha^3 A - 4\alpha A^3$	$\alpha^4 - 6\alpha^2 A^2 + A^4$	$\sqrt{}^2$ QQ: $\alpha^2 + A^2 = H^4$
$5\alpha^4 A - 10\alpha^2 A^3 + A^5$	$\alpha^5 - 10\alpha^3 A^2 + 5\alpha A^4$	QC: $\alpha^2 + A^2 = H^5$

XXXI.

XXXI. Si semicirculus secetur in quotlibet æquales partes & chordæ ducantur, Erit.
A : 2R :: 2R + A + a : chordæ omnes.



BD = LC = 1.
BF = LI = LC + Ia = 1 + bis 3.
BH = LG = LI + Gc = 1 + bis 3 + bis 5.
BK = LE = LG + Ee = 1 + bis 3 + bis 5 + bis 7.

BE = LK = bis 2.
BG = LH = LK + Hb = bis 2 + bis 4.
BI = LF = LH + Fd = bis 2 + bis 4 + bis 6.
Diameter = LF + Do. = bis 2 + bis 4 + bis 6 + bis 8.

BD

BD = 1 : Diam :: 2 : BK :: 3 : BI :: 4 BH ::
:: 5 : BG :: 6 : BF :: 7 : BE :: 8 BD ;

Quare.

BD : Diam :: $\underset{\text{BD + BK}}{\underline{\text{1 + bis 3 + bis 5 + bis 7}}}$: Diam : + BI + BG + BE bis. quæ est summa parium dupla.

Et. BD : Diam :: $\underset{\text{Diameter.}}{\underline{\text{bis 2 + bis 4 + bis 6 + bis 8}}}$: BK + BH + BF + BD bis quæ est summa imparium dupla.

F I N I S.

Errata sic Corrige.

PAg. 9. lin. 16. Sic $\frac{11}{10}$. p. 11. l. 14. Ergo K $\triangleright$ H. p. 13. l. 9. libræ. l. vectis. p. 16. l. 10. minore. l. 11. majore. p. 19. l. 2. 3. 5. p. 23. N. 1. hujus. l. vectis. N. 2. pro 2. 3. l. 3. 4. p. 60. l. 9. aut l. autem p. 63. l. 19. 1, 74. p. 140. l. 6. LK. p. 143. l. 9. $\frac{1}{3}$: 1. p. 147. Mx : Nx. p. 149. l. 9. αζ. p. 174. S, I. S, A. S, L. p. 184. l. 13. cortinam.